Analysis im Größenkalkül der Physik

Alten, Heinz-Wilhelm
Quade, Wilhelm

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 23, 1971/72, S.311-341

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Analysis im Größenkalkül der Physik

Von **Heinz-Wilhelm Alten** und **Wilhelm Quade**

Vorgelegt von **Wilhelm Quade**

(Eingegangen am 8. Juni 1970)

Übersicht: In der folgenden Arbeit werden die grundlegenden Begriffe der Analysis so verallgemeinert, daß sie auch im Größenkalkül (Dimensionsanalysis) zur Verfügung stehen. Entscheidend ist dabei die Forderung, der Analysis eine topologische Struktur zugrunde zu legen, die mit der algebraischen Struktur des Größenkalküls verträglich ist.

Summary: In the following paper the fundamental concepts of analysis are generalized as to be applicable to the calculus of physical quantities (dimensional analysis). In order to do this a topological structure must be introduced which is compatible with the underlying algebraical structure of the calculus of physical quantities.

Einleitung: In zwei vorangehenden Arbeiten [2] und [3] wurde eine Einführung in die mathematischen Grundlagen des Größenkalküls gegeben, wobei in erster Linie Fragen der algebraischen Struktur behandelt wurden. Hieran anknüpfend wird im folgenden gezeigt, wie Begriffe und Methoden der Analysis auf den Größenkalkül ausgedehnt werden können. Die Berücksichtigung der algebraischen Struktur führt auf die Analysis in eindimensionalen Banachräumen und Produkten von solchen Räumen. Vom Standpunkt der Analysis sind die hierbei auftretenden Fragen elementar, doch kommt es hier vor allem darauf an, die Besonderheiten herauszustellen, die sich aus der geforderten Verträglichkeit von topologischer und algebraischer Struktur ergeben.

Ein großer Teil der in der einschlägigen Literatur anzutreffenden Formeln ist offensichtlich so entstanden, daß man mit „Größen" so rechnete, als ob für sie dieselben Rechengesetze wie für die reellen Zahlen gültig wären. Wäre dies der Fall, also die „Menge der Größen" ein kommutativer Körper, dann wäre es möglich, „verschiedenartige" Größen zu addieren, also etwa die Summe von 5 Metern und 3 Sekunden zu bilden. Dies ist mit der algebraischen Struktur des Größenkalküls unvereinbar (vgl. Anhang). Wenn im folgenden manche Formel in einer von der herkömmlichen abweichenden Schreibweise auftritt, so ist dies in der Struktur des Kalküls begründet, hat aber nichts mit einer Einschränkung der Allgemeinheit zu tun. In der folgenden Darstellung werden die einschlägigen Begriffe der modernen Algebra und Analysis benutzt, die auch in neuere Lehrbücher der Ingenieurmathematik Eingang gefunden haben.

In Abschnitt **1.** werden grundlegende Begriffe wie kommutative freie Gruppe von endlichem Typus, Abbildung (Funktion) erörtert und der Begriff der GV-Struktur (Gruppe von Vektorräumen) eingeführt; durch Normierung der Vektorräume wird der GV-Struktur eine Topologie assoziiert; die Begriffe Banachraum und Produkt von Banachräumen werden kurz erläutert. Abschnitt **2.** handelt von den Abbildungen, die den elementaren Funktionen der Analysis entsprechen; zur Darstellung dieser Funktionen werden Potenzreihen benutzt. In **3.** werden Abbildungen allgemeiner Art, auch Räume von Abbildungen betrachtet. **4.** handelt von stetigen Abbildungen, Homöomorphismen, Isomorphismen und gleichmäßig stetigen Abbildungen. In **5.** werden Ableitung einer stetigen Abbildung, Differenzierbarkeit und vollständiges Differential behandelt. In **6.** wird der Begriff der Stammfunktion definiert, anschließend der des bestimmten Integrals. Diese Begriffe werden auf die aus der reellen Analysis bekannten zurückgeführt. Der Abschnitt endet mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung. In **7.** werden Differentialgleichungen der Dimensionsanalysis behandelt. Dabei wird auf eine Darstellung der allgemeinen Theorie verzichtet und nur an einigen typischen Beispielen gezeigt, wie die Lösungen in der Symbolik des Größenkalküls anzuschreiben sind.

Im Anhang I wird die Frage der *Einheiten mit nichtganzzahligen Exponenten* behandelt und gezeigt, daß nicht alle derartigen „Einheiten" in einem Einheitensystem mit *endlich* vielen Basiseinheiten definiert werden können. Dies ergibt sich daraus, daß weder $\mathbb{Q}$ noch $\mathbb{R}$ freie $\mathbb{Z}$-Moduln von endlichem Typus sind. Im Anhang II wird die der algebraischen Struktur des Größenkalküls eigentümliche Einschränkung bezüglich der additiven Verknüpfung erläutert.

1. Grundlegende Begriffe

1.1. Im Größenkalkül ist der Begriff der *kommutativen freien Gruppe von endlichem Typus* (unendliche freie Abelsche Gruppe von endlichem Rang) fundamental. Vor Eintritt in jedwede Untersuchung innerhalb der Dimensionsanalysis ist es erforderlich zu sagen, welche kommutative freie Gruppe von endlichem Typus den Betrachtungen zu Grunde gelegt werden soll. Nur dadurch können Mißverständnisse und das Auftreten von Paradoxien vermieden werden.

Es sei $\mathfrak{G}_0$ eine kommutative freie Gruppe mit der Basis $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$,

$$\mathfrak{G}_0 = \{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_\varrho^{\alpha_\varrho} \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho \in \mathbb{Z}\}\,.$$

In der Terminologie der Physik stellen die Elemente von $\mathfrak{G}_0$ ein System von *kohärenten Einheiten* dar, die Elemente $a_1, \ldots, a_\varrho$ die *Basiseinheiten* des Systems und die übrigen Elemente die abgeleiteten Einheiten. Eines der bekanntesten Einheitensysteme ist das MKSA-System; es hat die Basiseinheiten m (Meter), kg (Kilogramm), s (Sekunde), A (Ampère). Eine ausführliche Beschreibung der Eigenschaften von $\mathfrak{G}_0$ ist in § 2 der Arbeit [3] gegeben.

Wird der eindimensionale Vektorraum über $\mathbb{R}$, der die Basis $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_\varrho^{\alpha_\varrho}$ hat, mit $A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_\varrho^{\alpha_\varrho}$ bezeichnet, dann ist

$$\boldsymbol{\mathfrak{G}}_0 = \{A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_\varrho^{\alpha_\varrho} \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho \in \mathbb{Z}\}$$

eine *Familie von abzählbar unendlich vielen eindimensionalen Vektorräumen*, kurz eine Folge von solchen Räumen. $\boldsymbol{\mathfrak{G}}_0$ ist eine zu $\mathfrak{G}_0$ isomorphe kommutative freie

Gruppe vom Typus ϱ, die Elemente von $\mathfrak{G}_0$ sind eindimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$. Näheres hierüber ist in § 9 der Arbeit [2] ausgeführt.

In der Physik ist es üblich, von einem Element des eindimensionalen Vektorraumes $A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_\varrho^{\alpha_\varrho}$ zu sagen, daß es die „Dimension $A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_\varrho^{\alpha_\varrho}$" habe; dieser Begriff der „Dimension" darf nicht mit dem der „Dimension eines Vektorraumes" verwechselt werden.

Von den Elementen der Gruppe $\mathfrak{G}_0$ kommt dem *Einselement*

$$e_0 = a_1^0 \, a_2^0 \cdots a_\varrho^0$$

besondere Bedeutung zu. Das Einselement e_0 ist *idempotent*, für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}$ ist $e_0^\alpha = e_0$. Der eindimensionale Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der Basis e_0, er sei K genannt, ist das *Einselement* von $\mathfrak{G}_0$. K ist ein *kommutativer Körper*, der zu dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen isomorph ist. Näheres über K ist in den §§ 7, 8 und 13 der Arbeit [2] ausgeführt.

In der Physik werden die Elemente von K „dimensionslose Größen" genannt.

1.2. Es seien T und X irgend zwei Elemente von $\mathfrak{G}_0$, also zwei eindimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$, und es sei *f eine Abbildung von T in X*, also jedem $t \in T$ durch f *ein und nur ein* $x \in X$ als Bild zugeordnet.

Im allgemeinen werden T und X disjunkte Vektorräume sein. Ist $X = T$, dann liegt eine Abbildung des Vektorraumes T in sich vor. Die Symbole T und X, bzw. t und x wurden hier gewählt, um an ein bekanntes Beispiel der Mechanik zu erinnern, nämlich an die „Abhängigkeit des Weges von der Zeit". Selbstverständlich ist die Interpretation von t als „Zeit" und x als „Weg" nur eine unter vielen anderen.

Der Unterschied zwischen den im Größenkalkül und den in der reellen Analysis auftretenden Abbildungen wird deutlich, wenn zur Darstellung einer „in T definierten und ihre Werte in X annehmenden" Funktion f die Gleichung $x = f(t)$ benutzt wird. Während es sich bei reellwertigen Funktionen einer reellen Veränderlichen ausschließlich um Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ handelt, liegt im Größenkalkül (in der Dimensionsanalysis) eine Abbildung eines Vektorraumes T in einen Vektorraum X vor, wobei T und X im allgemeinen disjunkt sein werden. Die zu einer Abbildung f gehörende Gleichung $x = f(t)$ verlangt, daß *jeder „Funktionswert" $f(t)$ Element des Vektorraumes X ist*. Die letzte Forderung ist typisch für die Abbildungen der Dimensionsanalysis, und es ist daher zur Beschreibung solcher Abbildungen erforderlich, die zu Grunde gelegte *algebraische Struktur* anzugeben.

1.3. Es sei $X, Y, \ldots$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen, E die Vereinigung dieser Mengen. E werde eine *GV-Struktur* (Gruppe von Vektorräumen) genannt, wenn

a) jede der Mengen $X, Y, \ldots$ ein eindimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist,

b) $X, Y \ldots$ Elemente einer kommutativen freien Gruppe $\mathfrak{G}_0$ von *endlichem* Typus sind,

c) $\mathbb{R} \cap X = \emptyset$ für alle $X \in \mathfrak{G}_0$,

d) für alle $X, Y \in \mathfrak{G}_0$ durch

$$(x,y) \to xy \quad \text{für alle} \quad x \in X \quad \text{und alle} \quad y \in Y \tag{I}$$

eine symmetrische bilineare Abbildung von $X \times Y$ in $XY \in \mathfrak{G}_0$ definiert ist.

Aus den angeschriebenen Forderungen ergibt sich:

α) jedes Element von E ist Element genau eines $X \in \mathfrak{G}_0$, denn die Elemente von $\mathfrak{G}_0$ sind paarweise disjunkt,

β) da die Elemente von $\mathfrak{G}_0$ Vektorräume über $\mathbb{R}$ sind, sind für alle $X \in \mathfrak{G}_0$ die folgenden Abbildungen gegeben:

$$(x,x') \to x + x' \quad \text{von} \quad X \times X \text{ in } X \quad \text{für alle} \quad x,x' \in X, \tag{II}$$

$$(\lambda,x) \to \lambda x \quad \text{von} \quad \mathbb{R} \times X \text{ in } X \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{und alle} \quad x \in X, \tag{III}$$

γ) die Verknüpfung *Addition* ist nur für Elemente ein- und desselben Vektorraumes $X \in \mathfrak{G}_0$ definiert, Addition von Elementen disjunkter Vektorräume ist ausgeschlossen (vgl. Anhang II),

δ) $\mathbb{R} \cap E = \emptyset$, d.h. kein Element von E ist eine reelle Zahl (Trennungsaxiom, vgl. [3], § 2, S. 21),

ε) die Abbildung (I) ist eine Abbildung von $E \times E$ in E, welche auf E eine Multiplikation definiert; E vermindert um die Menge der Nullvektoren aller Vektorräume von $\mathfrak{G}_0$ ist eine kommutative Gruppe $\mathfrak{G}$, deren Einselement e_0 ist (vgl. [2], § 5, S. 39).

1.4. Um die Methoden der Differential- und Integralrechnung auf den Größenkalkül ausdehnen, d.h. Analysis auf einer GV-Struktur treiben zu können, bedarf es der Einführung einer *Topologie*. Zu diesem Zweck wird zunächst in *jedem* Vektorraum $X \in \mathfrak{G}_0$ eine Norm eingeführt. Dadurch wird jedes Element von $\mathfrak{G}_0$ zu einem eindimensionalen normierten Raum und $\mathfrak{G}_0$ selbst zu einer Folge von eindimensionalen normierten Räumen.

Ist $x_0 \in \mathfrak{G}_0$ Basis von $X \in \mathfrak{G}_0$, dann gibt es zu jedem $x \in X$ *ein und nur ein* $\xi \in \mathbb{R}$, so daß $x = \xi x_0$. Die Abbildung

$$h\colon\ \xi \to x \tag{1.4.1}$$

ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$ auf X. Wird der Vektorraum $\mathbb{R}$ durch die Abbildung $\xi \to |\xi|$ normiert und die hiermit auf $\mathbb{R}$ eingeführte Norm unter Berücksichtigung von (1.4.1) auf den Vektroraum X übertragen, also

$$\|x\| = |\xi|$$

gesetzt, dann ist die Abbildung (1.4.1) eine *lineare Isometrie* von $\mathbb{R}$ auf X. Wird *jeder* der zu $\mathfrak{G}_0$ gehörenden Vektorräume in der soeben beschriebenen Weise normiert, dann hat *jedes Element von* $\mathfrak{G}_0$ *die Norm* 1.

In der Sprache der Physik heißt das: Jede Einheit des kohärenten Einheitensystems $\mathfrak{G}_0$ hat die Norm 1.

Die auf einem Vektorraum $X \in \mathfrak{G}_0$ eingeführte Norm ist eine Abbildung von X in $\mathbb{R}_+$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) $\|x\| = 0$ ist äquivalent $x = o$, (o Nullelement von X),

b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ für alle $x \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$,

c) $\|x + x'\| \leqq \|x\| + \|x'\|$ für alle $x, x' \in X$.

Es ist zu beachten, daß der Abstand nur für Elemente ein und desselben Vektorraumes X erklärt und die GV-Struktur E infolgedessen *kein normierter Raum* ist.

Da (1.4.1) eine lineare Isometrie ist, hat jede *Cauchyfolge* in $\mathbb{R}$ als Bild eine Cauchyfolge in $X \in \mathfrak{G}_0$ und umgekehrt. Da $\mathbb{R}$ ein vollständiger normierter Raum ist, ist jeder in der oben beschriebenen Weise normierte Vektorraum $X \in \mathfrak{G}_0$ ein *vollständiger normierter Raum*, d.h. *ein Banachraum.* Jede Cauchyfolge mit Elementen aus X konvergiert infolgedessen gegen ein Element von X. E ist danach die Vereinigung der Elemente einer Folge von paarweise disjunkten eindimensionalen Banachräumen.

Ist $x_1 \in X$ und $\varrho > 0$, dann wird die Menge

$$U(x_1, \varrho) = \{x \in X \mid \|x - x_1\| < \varrho\}$$

eine *offene Kugelumgebung* von x_1 mit dem Radius ϱ genannt,

$$\bar{U}(x_1, \varrho) = \{x \in X \mid \|x - x_1\| \leqq \varrho\}$$

eine *abgeschlossene Kugelumgebung* von x_1 mit dem Radius ϱ. Ist I ein (offenes, abgeschlossenes oder halboffenes) Intervall der Zahlengeraden $\mathbb{R}$, so werde

$$J = h(I) = \{\xi x_0 \in X \mid \xi \in I\}$$

ein (offenes, abgeschlossenes oder halboffenes) *Intervall des eindimensionalen Vektorraumes* X genannt. Im folgenden wird anstelle von $J = h(I)$ oft $J = I x_0$ geschrieben. Ist beispielsweise $\mathbb{R}_+ = \{\xi \in \mathbb{R} \mid \xi \geqq 0\}$ bzw. $\mathbb{R}_+^* = \{\xi \in \mathbb{R} \mid \xi > 0\}$, dann ist $\mathbb{R}_+ x_0$ die Menge $\{\xi x_0 \in X \mid \xi \geqq 0\}$ bzw. $\mathbb{R}_+^* x_0$ die Menge $\{\xi x_0 \in X \mid \xi > 0\}$. Sind ξ_1 und ξ_2 Endpunkte eines Intervalls I von $\mathbb{R}$, dann sind $h(\xi_1) = x_1$ und $h(\xi_2) = x_2$ die Endpunkte des Intervalls $J = h(I)$.

Die *natürliche Ordnung* von $\mathbb{R}$ werde vermöge der Bijektion (1.4.1) auf X übertragen, d.h.

$$\xi_1 < \xi_2 \quad \text{und} \quad x_1 < x_2$$

seien *äquivalent*.

1.5. Sind X und Y zwei zu $\mathfrak{G}_0$ gehörende Vektorräume und gilt für alle Elemente des *kartesischen Produktes* $X \times Y$, also für alle geordneten Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y),$$

dann ist $X \times Y$ ein *zweidimensionaler Vektorraum* über $\mathbb{R}$, welcher als *Produktraum der Vektorräume X und Y* bezeichnet wird. Der Begriff des Produktes von Vektorräumen kann unmittelbar auf Produkte mit endlich vielen Faktoren erweitert werden.

Ist x_0 Basis von X, y_0 Basis von Y, dann gibt es zu jedem $(x, y) \in X \times Y$ *ein und nur ein* $(\xi, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, so daß $(x, y) = (\xi x_0, \eta y_0)$. Die Abbildung

$$(\xi, \eta) \to (x, y) \tag{1.5.1}$$

ist ein Isomorphismus des Vektorraumes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf den Vektorraum $X \times Y$. Wird der Vektorraum $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ durch $\|(\xi,\eta)\| = \sup(|\xi|, |\eta|)$ normiert, und diese Norm unter Berücksichtigung von (1.5.1) auf den Vektorraum $X\times Y$ übertragen, also $\|(x,y)\| = \|(\xi,\eta)\|$ gesetzt, dann ist die Abbildung (1.5.1) eine *lineare Isometrie*, und es ist

$$\|(x,y)\| = \sup(\|x\|, \|y\|) .$$

Der so normierte Vektorraum $X\times Y$ ist *vollständig*, also ein Banachraum, da $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ vollständig ist. Entsprechendes gilt für Produkte von endlich vielen Banachräumen.

Die Norm des Produktes zweier Elemente $x\in X$ und $y\in Y$ ist

$$\|xy\| = \|x\|\cdot\|y\| .$$

Mit $x = \xi x_0$ und $y = \eta y_0$ ist nämlich $xy = \xi\eta x_0 y_0$. Wegen $\|x_0 y_0\| = 1$ folgt hieraus unmittelbar die Behauptung.

Entsprechendes gilt für die Norm eines Produktes mit mehr als zwei Faktoren.

1.6. Auf E kann eine *Topologie* wie folgt eingeführt werden. Nach **1.3.** ist E Vereinigung der Elemente einer Folge (X_ν) von paarweise disjunkten eindimensionalen normierten Räumen.

Wird jedem $\nu\in\mathbb{N}$ die Menge

$$H_\nu = \{(\nu,\xi) \mid \xi\in\mathbb{R}\}$$

zugeordnet, und $F = \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} H_\nu$ gesetzt, dann ist F Vereinigung einer Folge (H_ν) von paarweise disjunkten Teilmengen von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Wird auf der abgeschlossenen Teilmenge F von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ diejenige Topologie eingeführt, deren offene Mengen die Schnitte von F mit den offenen Mengen der Topologie von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sind, dann ist F als topologischer Unterraum von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ein topologischer Raum.

Ist b_ν eine Basis von X_ν, dann ist die Abbildung

$$(\nu,\xi)\to\xi b_\nu\,, \qquad \nu\in\mathbb{N},\ \xi\in\mathbb{R} \tag{1.6.1}$$

eine *Bijektion* von F auf E. Werden die durch (1.6.1) definierten Bilder der offenen Mengen von F als die offenen Mengen von E definiert, dann ist (1.6.1) ein *Homöomorphismus* von F auf E, also ist E ein topologischer Raum.

Die soeben auf E eingeführte Topologie ist mit der algebraischen Struktur von E verträglich, denn jede der in **1.3.** genannten Abbildungen (I), (II), (III) ist stetig (vgl. **4.10**).

2. Elementare Funktionen

2.1. Bei der Einführung des Funktionsbegriffes in den Größenkalkül ist die algebraische Struktur zu berücksichtigen. Um einen ersten Einblick in die hierdurch bedingten Eigenschaften der Funktionen (Abbildungen) zu erhalten, wird von einem elementaren Beispiel der Mechanik ausgegangen.

Es seien T und X Vektorräume einer GV-Struktur E. Bedeutet $t\in T$ eine Zeitspanne, $x\in X$ die Länge eines Weges, dann sind T und X disjunkt. Die Bewegung eines Massenpunktes, der sich geradlinig mit konstanter Beschleunigung bewegt (freier Fall im luftleeren Raum), wird durch die Gleichung

$$x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \tag{2.1.1}$$

beschrieben, in welcher c_0, c_1, c_2 von t unabhängige Konstanten bedeuten. Hier wird verlangt, daß die rechte Seite von (2.1.1) für alle $t \in T$ Element von X sei. Die hieraus folgenden Bedingungen für die c_λ lauten allgemein formuliert:

2.2. *Jede Abbildung*

$$f_\nu\colon\ t \to \sum_{\lambda=0}^{\nu} c_\lambda t^\lambda \tag{2.2.1}$$

ist genau dann eine Abbildung von T in X, wenn

$$c_\lambda \in X T^{-\lambda}\,, \qquad \lambda = 0, 1, \ldots, \nu\,. \tag{2.2.2}$$

Sind nämlich die Bedingungen (2.2.2) erfüllt, dann ist jedes Monom $c_\lambda t^\lambda$ ($\lambda = 0, \ldots, \nu$) für alle $t \in T$ Element von X, also auch die Summe der Monome. Ist umgekehrt $f_\nu(t) \in X$ für alle $t \in T$, dann ist jeder Summand von $f_\nu(t)$, also jedes Monom $c_\lambda t^\lambda$, für alle $t \in T$ Element von X, denn die algebraische Struktur schließt die additive Verknüpfung von Elementen disjunkter Vektorräume aus. Daraus folgt (2.2.2).

Sind die Vektorräume $T^0, T^1, \ldots, T^\nu$ paarweise disjunkt, was beispielsweise bei (2.1.1) der Fall ist, dann sind nach (2.2.2) c_λ und c_μ für $\lambda \neq \mu$ *Elemente von disjunkten Vektorräumen.*

Ist t_0 Basis von T und x_0 Basis von X, dann gibt es wegen (2.2.2) zu jedem $c_\lambda \in X T^{-\lambda}$ genau ein $\alpha_\lambda \in \mathbb{R}$ und umgekehrt, so daß

$$c_\lambda = \alpha_\lambda x_0 t_0^{-\lambda}\,, \qquad \lambda = 0, 1, \ldots, \nu\,. \tag{2.2.3}$$

Mit $t = \tau t_0$ ist daher

$$c_\lambda t^\lambda = (\alpha_\lambda \tau^\lambda) x_0\,, \qquad \lambda = 0, 1, \ldots, \nu\,,$$

und hieraus folgt:

2.3. *Zu jeder Abbildung f_ν von T in X mit $f_\nu(t) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} c_\lambda t^\lambda$ gibt es genau ein Polynom φ_ν mit $\varphi_\nu(\tau) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} \alpha_\lambda \tau^\lambda$ und umgekehrt zu jedem Polynom φ_ν genau eine Abbildung f_ν von T in X, so daß*

$$f_\nu(t) = \varphi_\nu(\tau) x_0\,, \qquad \nu \in \mathbb{N}\,. \tag{2.3.1}$$

Hieraus ergibt sich weiter für $t = \tau t_0$:

2.4. *Existiert $\lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu(t) = f(t)$, dann existiert $\lim\limits_{\nu\to\infty} \varphi_\nu(\tau) = \varphi(\tau)$, und umgekehrt. Es ist*

$$f(t) = \varphi(\tau) x_0\,. \tag{2.4.1}$$

Existiert nämlich $\lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu(t) = f(t)$, dann ist $(f_\nu(t))$ eine Cauchyfolge in X und daher wegen (2.3.1) $(\varphi_\nu(\tau))$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Infolgedessen existiert

$\lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu(\tau) = \varphi(\tau)$. Da X ein Banachraum ist, gilt auch die Umkehrung. Wegen (2.3.1) ist

$$\lim_{\nu\to\infty} (f_\nu(t) - \varphi_\nu(\tau)x_0) = o\,,$$

woraus (2.4.1) folgt.

Hiervon ausgehend gelangt man zu Aussagen über diejenigen Abbildungen von T in X, die sich mit Hilfe von *Potenzreihen* beschreiben lassen.

Aus (2.2.3) folgt, daß es zu jeder Reihe $\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda t^\lambda$ genau eine Reihe $\sum_{\lambda=0}^{\infty} \alpha_\lambda \tau^\lambda$ gibt und umgekehrt, und die Potenzreihen $\sum_{\lambda=0}^{\infty} \|c_\lambda\|\,\|t\|^\lambda$ und $\sum_{\lambda=0}^{\infty} \alpha_\lambda \tau^\lambda$ denselben Konvergenzradius haben, denn $\|c_\nu\| = |\alpha_\nu|$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Daraus ergibt sich

2.5. *Ist* (f_ν) *eine Folge von Abbildungen von* T *in* X *mit* $f_\nu(t) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} c_\lambda t^\lambda$, *und hat die Potenzreihe* $\sum_{\lambda=0}^{\infty} \|c_\lambda\|\,\|t\|^\lambda$ *den Konvergenzradius* ϱ, *dann existiert* $\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(t) = f(t)$ *für alle* t *der Kugelumgebung* $U(o,\varrho)$ *des Nullelementes von* T, *sowie* $\lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu(\tau) = \varphi(\tau)$ *für jedes* $|\tau| < \varrho$, *und es gilt* (2.4.1). *Zu jeder Abbildung* f *mit* $f(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda t^\lambda$ *von* $U(o,\varrho)$ *in* X *gibt es genau eine Abbildung* φ *mit* $\varphi(\tau) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \alpha_\lambda \tau^\lambda$ *von* $|\tau| < \varrho$ *in* $\mathbb{R}$ *und umgekehrt.*

Dieses Ergebnis lehrt, daß es zu jeder vermöge einer konvergenten Reihe $\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda t^\lambda$ definierten Abbildung f von $U(o,\varrho)$ in X eine für $|\tau| < \varrho$ definierte reellwertige Funktion φ der reellen Veränderlichen τ gibt, so daß

$$x = f(t) = \varphi(\tau)x_0\,.$$

Es sei noch darauf hingewiesen, daß eine Reihe wie $\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda t^\lambda$ i.a. keine Potenzreihe im üblichen Sinne ist, da für $T \neq K$ die „Koeffizienten" c_λ Elemente disjunkter Vektorräume sind.

2.6. Zur Darstellung von Funktionen in der Dimensionsanalysis ist es zweckmäßig, das *skalare Produkt* zweier Vektoren einzuführen. Sind $t = \tau t_0$ und $t_1 = \tau_1 t_0$ zwei Vektoren des eindimensionalen Vektorraums T, der die Basis t_0 hat, so ist das skalare Produkt dieser beiden Vektoren definiert durch die Abbildung

$$(t, t_1) \to (t \mid t_1)$$

von $T \times T$ in $\mathbb{R}$, wobei $(t \mid t_1) = \tau\tau_1$. Das skalare Produkt ist eine *symmetrische Bilinearform* auf T. Diese Form ist positiv und nicht ausgeartet, denn $(t \mid t) = \tau^2 > 0$ für alle $t \neq o$. Insbesondere ist $(t \mid t_0) = \tau$, da t_0 ein unitärer Vektor ist. Infolgedessen kann (2.4.1) geschrieben werden:

$$x = f(t) = \varphi((t \mid t_0))x_0\,. \tag{2.6.1}$$

2.7. Von den oben beschriebenen Abbildungen sind diejenigen, die sich aus den Potenzreihendarstellungen der elementaren Funktionen ergeben, wegen ihrer praktischen Bedeutung von Interesse. Im folgenden sind einige dieser Abbildungen beschrieben, die Koeffizienten der einander entsprechenden Reihen für f und φ ergeben sich aus (2.2.3).

2.7.1. Der *Exponentialfunktion*

$$\tau \to \exp \tau = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\tau^\lambda}{\lambda!}$$

entspricht die Abbildung

$$f\colon\ t \to \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda!} (t \mid t_0)^\lambda \right) x_0$$

von T auf $\mathbb{R}_+^* \, x_0$. Es ist $x = f(t) = (\exp \tau)\, x_0$ und daher nach (2.6.1)

$$x = f(t) = (\exp (t \mid t_0)) x_0 \,.$$

2.7.2. Der *Sinusfunktion*

$$\tau \to \sin \tau = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{(2\lambda + 1)!} \tau^{2\lambda+1}$$

entspricht die Abbildung

$$f\colon\ t \to \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{(2\lambda + 1)!} (t \mid t_0)^{2\lambda+1} \right) x_0$$

von T in X. Es ist

$$x = f(t) = (\sin \tau)\, x_0 = (\sin (t \mid t_0))\, x_0 \,.$$

Wird t als Zeit interpretiert, x als Weg, dann stellt diese Abbildung eine „Sinusschwingung“ mit der Periode $2\pi t_0$ und der Amplitude x_0 dar.

2.7.3. Der *Logarithmusfunktion*

$$\tau \to \ln (1 + \tau) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda} \tau^\lambda, \qquad |\tau| < 1$$

entspricht die Abbildung

$$f\colon\ t \to \left(\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda} (t \mid t_0)^\lambda \right) x_0 \tag{2.7.3.1}$$

von $U(o,1) \subset T$ in X; es ist

$$x = f(t) = (\ln (1 + \tau))\, x_0 \,.$$

Nach (2.6.1) ergibt sich für die letzte Gleichung die Schreibweise

$$x = f(t) = (\ln (1 + (t \mid t_0)))\, x_0 \,.$$

In analoger Weise ergibt sich aus der für $|\tau - 1| < 1$ konvergenten Potenzreihe

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda} (\tau - 1)^\lambda$$

die durch

$$x = (\ln \tau)\, x_0 = (\ln (t \mid t_0))\, x_0$$

beschriebene Abbildung von $U(t_0, 1) \subset T$ in X. Wie die Logarithmusfunktion auf $\mathbb{R}_+^* t_0$ definiert werden kann, ist in **3.3.** gezeigt.

2.7.4. Der *allgemeinen Potenz* (binomischen Reihe)

$$\tau \to (1+\tau)^\alpha = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\lambda} \tau^\lambda, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad |\tau| < 1$$

entspricht die Abbildung

$$f\colon\ t \to \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\lambda} (t \mid t_0)^\lambda \right) x_0 \tag{2.7.4.1}$$

von $U(o, 1) \subset T$ in X; es ist

$$x = f(t) = (1+\tau)^\alpha x_0 = (1 + (t \mid t_0))^\alpha x_0 .$$

Entsprechend kann durch

$$x = \tau^\alpha x_0 = (t \mid t_0)^\alpha x_0$$

die Abbildung

$$t \to \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\lambda} ((t \mid t_0) - 1)^\lambda x_0$$

von $U(t_0, 1) \subset T$ in X beschrieben werden. Wie die allgemeine Potenz auf $\mathbb{R}_+^* t_0$ definiert werden kann, ist in **3.4.** gezeigt.

3. Funktionen (Fortsetzung)

Nachdem bisher nur solche Abbildungen von T in X betrachtet wurden, die Potenzreihen entsprechen, sollen im folgenden Abbildungen allgemeinerer Art untersucht werden. Es seien $T \in \mathfrak{G}_0$ und $X \in \mathfrak{G}_0$ normierte Räume, $t_0 \in \mathfrak{G}_0$ und $x_0 \in \mathfrak{G}_0$ seien ihre Basen; ferner sei g die lineare Isometrie von $\mathbb{R}$ auf T mit $g(\tau) = \tau t_0$, h die lineare Isometrie von $\mathbb{R}$ auf X mit $h(\xi) = \xi x_0$. Dann gilt der für die Dimensionsanalysis fundamentale Satz:

3.1. *Ist φ eine Abbildung einer Teilmenge A von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, dann ist*

$$f = h \circ \varphi \circ g^{-1}$$

eine Abbildung der Teilmenge $g(A) = W$ von T in X; ist f eine Abbildung einer Teilmenge W von T in X, dann ist

$$\varphi = h^{-1} \circ f \circ g$$

eine Abbildung der Teilmenge $g^{-1}(W) = A$ von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Für alle $\tau \in A$ bzw. $t \in W$ ist

$$x = f(t) = \varphi(\tau)\, x_0 . \tag{3.1.1}$$

Zu jedem auf A definierten φ gibt es genau ein auf W definiertes f und umgekehrt.

Beweis. φ sei eine Abbildung von A in $\mathbb{R}$. Da g bzw. h eine lineare Isometrie von $\mathbb{R}$ auf T bzw. $\mathbb{R}$ auf X ist, gibt es zu jedem $t \in g(A)$ vermöge g^{-1} genau ein $\tau \in A$, zu jedem solchen τ vermöge φ genau ein $\xi \in \mathbb{R}$, zu jedem solchen ξ vermöge h genau ein $x \in X$. Somit ist $f = h \circ \varphi \circ g^{-1}$ eine Abbildung von $g(A) = W$ in X.

Umgekehrt, f sei eine Abbildung von W in X. Zu jedem $\tau \in g^{-1}(W)$ gibt es vermöge g genau ein $t \in W$, zu jedem solchen t vermöge f genau ein $x \in X$, zu jedem solchen x vermöge h^{-1} genau ein $\xi \in \mathbb{R}$. Somit ist $\varphi = h^{-1} \circ f \circ g$ eine Abbildung von $g^{-1}(W) = A$ in $\mathbb{R}$. Gleichung (3.1.1) folgt unmittelbar aus $f = h \circ \varphi \circ g^{-1}$.

3.2. Selbstverständlich kommen in der Dimensionsanalysis auch Abbildungen vor, bei denen ein normierter Raum $T \in \mathfrak{G}_0$ oder eine Teilmenge eines solchen Raumes in die reelle Zahlengerade $\mathbb{R}$ abgebildet wird, auch Abbildungen von $\mathbb{R}$ oder einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ in einen normierten Raum $X \in \mathfrak{G}_0$. So ist die lineare Isometrie g^{-1} eine Abbildung von T auf $\mathbb{R}$, die lineare Isometrie h eine Abbildung von $\mathbb{R}$ auf X; $\varphi \circ g^{-1}$ ist eine Abbildung einer Teilmenge W von T in $\mathbb{R}$, $h \circ \varphi$ eine Abbildung einer Teilmenge A von $\mathbb{R}$ in X.

Ist $X = T$, dann gehört zu der Abbildung φ einer Teilmenge A von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ die Abbildung

$$f\colon\; t \to \varphi(\tau)\, t_0$$

der Teilmenge $g(A)$ von T in T. Ist φ die identische Abbildung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$, dann ist

$$f\colon\; t \to (t \mid t_0)\, x_0$$

eine lineare Isometrie von T auf X, für $X = T$ die identische Abbildung von T auf T.

3.3. Nach **3.1.** kann die *Logarithmusfunktion* auf $\mathbb{R}_+^*\, t_0$ wie folgt definiert werden. Zu der Abbildung $\varphi\colon\; \tau \to \ln \tau$ von $\mathbb{R}_+^*$ auf $\mathbb{R}$ gehört nach **3.1.** die Abbildung

$$f\colon\; t \to (\ln \tau)\, x_0\,,$$

durch die $\mathbb{R}_+^*\, t_0$ in X abgebildet wird. Es ist für alle $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ bzw. $t \in \mathbb{R}_+^*\, t_0$

$$x = f(t) = (\ln \tau)\, x_0 = \ln\left((t \mid t_0)\right) x_0\,.$$

Dies ist die Erweiterung auf $\mathbb{R}_+^*\, t_0$ der in **2.7.3.** auf $U(t_0, 1)$ definierten Logarithmusfunktion.

3.4. In entsprechender Weise kann die *allgemeine Potenz* auf $\mathbb{R}_+^*\, t_0$ definiert werden. Von der Abbildung $\varphi\colon\; \tau \to \tau^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ausgehend, die $\mathbb{R}_+^*$ auf $\mathbb{R}_+^*$ abbildet, gelangt man zu der Abbildung

$$f\colon\; t \to \tau^\alpha x_0\,,$$

welche $\mathbb{R}_+^*\, t_0$ auf $\mathbb{R}_+^*\, x_0$ abbildet. Es ist für alle $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ bzw. $t \in \mathbb{R}_+^*\, t_0$

$$x = f(t) = \tau^\alpha x_0 = (t \mid t_0)^\alpha x_0\,.$$

Dies ist die Erweiterung auf $\mathbb{R}_+^*\, t_0$ der in **2.7.4.** auf $U(t_0, 1)$ definierten allgemeinen Potenz.

3.5. Beim Anschreiben von Abbildungen der Dimensionsanalysis ist Vorsicht geboten. So ist es beispielsweise in der reellen Analysis legitim, eine Abbildung von $\mathbb{R}$

in $\mathbb{R}$ wie $\tau \to \tau + \tau^2$ anzuschreiben, doch in der Dimensionsanalysis ist es i.a. absurd, eine Abbildung wie $t \to t + t^2$ anzuschreiben, es sei denn, daß $t \in K$ ist, denn additive Verknüpfung von Elementen disjunkter Vektorräume ist ausgeschlossen.

Ein anderes Beispiel dieser Art liefert die in der einschlägigen Literatur oft anzutreffende „Gleichung" $x = t^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Solche Gleichungen stammen aus der Zeit, in der es noch üblich war, mit „Skalaren" statt mit „Größen" zu rechnen. In der reellen Analysis ist es legitim, eine Abbildung φ von $\mathbb{R}_+^*$ auf $\mathbb{R}_+^*$ wie $\tau \to \tau^\alpha$ anzuschreiben. Die nach **3.1.** zu φ gehörende Abbildung f von $\mathbb{R}_+^* t_0$ in $\mathbb{R}_+^* x_0$ ist $f\colon t \to (t \mid t_0)^\alpha x_0$. Der Gleichung $\xi = \tau^\alpha$ entspricht also die Gleichung $x = (t \mid t_0)^\alpha x_0$. Sie folgt, wie oben gezeigt, aus den linearen Isometrien

$$g\colon \tau \to t, \qquad h\colon \xi \to x,$$

die durch die Gleichungen

$$t = \tau t_0, \qquad x = \xi x_0$$

beschrieben werden. Wird in der Gleichung $\xi = \tau^\alpha$ die Veränderliche τ durch t und ξ durch x ersetzt, so entsteht die „Gleichung" $x = t^\alpha$. Bei solch einem Vorgehen werden in den Isometrien g und h die *Pfeile durch Gleichheitszeichen ersetzt*, was offensichtlich inkorrekt ist. Dagegen ist es korrekt, die g und h entsprechenden Gleichungen $t = \tau t_0$ und $x = \xi x_0$ zu benutzen, was auf $x = (t \mid t_0)^\alpha x_0$ führt. Allgemein: Der Gleichung $\xi = \varphi(\tau)$ entspricht die Gleichung $x = (h \circ \varphi \circ g^{-1})(t)$, aber nicht $x = \varphi(t)$.

Nach dem soeben Gesagten ist es überflüssig, sich um eine Rechtfertigung der „Gleichung" $x = t^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}^*$ zu bemühen, zumal es nach **3.1.** keine Abbildung f von einem Vektorraum $T \in \mathfrak{G}_0$ in einen Vektorraum $X \in \mathfrak{G}_0$ gibt, zu der es keine reellwertige Funktion φ einer reellen Veränderlichen gibt.

3.6. Aus **3.1.** ergibt sich unmittelbar

$$\|f(t)\| = |\varphi(\tau)|. \tag{3.6.1}$$

Aus der Bijektivität der linearen Isometrien g und h und (3.1.1) folgt, wenn A und W die in **3.1.** angegebene Bedeutung haben:

Ist die Abbildung φ von A in $\mathbb{R}$ injektiv (surjektiv, bijektiv), dann gilt dies auch für die Abbildung f von $g(A) = W$ in X und umgekehrt.

Hieraus ergeben sich unmittelbar Aussagen über *inverse Abbildungen*. Ist φ eine *bijektive Abbildung* von A in $\mathbb{R}$, dann ist die Abbildung $f = h \circ \varphi \circ g^{-1}$ von $g(A) = W$ in X ebenfalls bijektiv. Infolgedessen ist φ^{-1} eine Bijektion von $\varphi(A)$ auf A und f^{-1} eine Bijektion von $f(W)$ auf W. Es ist

$$f^{-1} = g \circ \varphi^{-1} \circ h^{-1}, \qquad \varphi^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \circ h,$$

und für alle $\xi \in \varphi(A)$ bzw. alle $x \in \varphi(A)\, x_0$

$$f^{-1}(x) = \varphi^{-1}(\xi)\, t_0. \tag{3.6.2}$$

3.7. Beispielsweise ist die Logarithmusfunktion die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Da nämlich die Abbildung $\tau \to \exp \tau$ von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}_+^*$ bijektiv ist, ist

$$f\colon t \to (\exp \tau)\, x_0$$

eine Bijektion von T auf $\mathbb{R}_+^* x_0$. Nach (3.6.2) ist die zu f inverse Abbildung

$$f^{-1}\colon\ x \to (\ln \xi) t_0$$

eine Bijektion von $\mathbb{R}_+^* x_0$ auf T. Es ist daher für alle $\xi \in \mathbb{R}_+^*$ bzw. $x \in \mathbb{R}_+^* x_0$

$$t = f^{-1}(x) = (\ln \xi) t_0 = (\ln (x \mid x_0)) t_0 \,.$$

Als weiteres Beispiel werde die bijektive Abbildung $\varphi\colon \tau \to \tau^\nu$ mit $\nu \in \mathbb{N}^*$ von $\mathbb{R}_+$ auf $\mathbb{R}_+$ betrachtet. Zu ihr gehört die Bijektion $f\colon t \to \tau^\nu x_0$ von $\mathbb{R}_+ t_0$ auf $\mathbb{R}_+ x_0$, und es ist daher $f^{-1}\colon x \to \xi^{1/\nu} t_0$ eine Bijektion von $\mathbb{R}_+ x_0$ auf $\mathbb{R}_+ t_0$. Nach (2.6.1) ist

$$x = f(t) = (t \mid t_0)^\nu x_0 \,, \qquad t = f^{-1}(x) = (x \mid x_0)^{1/\nu} t_0 \,.$$

3.8. Weitere Einblicke in die Eigenschaften der Abbildungen der Dimensionsanalysis ergeben sich bei der Untersuchung von *Räumen von Abbildungen.*

Es sei $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ die Menge der Abbildungen φ einer Teilmenge A von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $\mathscr{F}(W, X)$ die Menge der Abbildungen f der Teilmenge $g(A) = W$ von T in X. Dann sind $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ und $\mathscr{F}(W, X)$ *Vektorräume über* $\mathbb{R}$. Dabei ist die Summe $\varphi_1 + \varphi_2$ zweier Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ durch $(\varphi_1 + \varphi_2)(\tau) = \varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)$ definiert, und das Produkt $\alpha\varphi$ durch $(\alpha\varphi)(\tau) = \alpha\varphi(\tau)$ für alle $\tau \in A$; entsprechendes gilt für $\mathscr{F}(W, X)$.

3.9. *Die Abbildung u mit $u(\varphi) = h \circ \varphi \circ g^{-1} = f$ ist ein Isomorphismus des Vektorraumes $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ auf den Vektorraum $\mathscr{F}(W, X)$.* Nach **3.1.** ist u bijektiv; daß u linear ist, ergibt sich ebenfalls aus **3.1.**, denn sind $f_1, f_2 \in \mathscr{F}(W, X)$ die Bilder von $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$, dann hat $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2$ das Bild $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, und umgekehrt.

Ist $\mathscr{B}(A, \mathbb{R})$ die Menge aller $\varphi \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$, für die $\sup\limits_{\tau \in A} |\varphi(\tau)| < \infty$ ist, dann ist $\mathscr{B}(A, \mathbb{R})$ ein Vektorunterraum von $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$, der durch $\|\varphi\| = \sup\limits_{\tau \in A} |\varphi(\tau)|$ zu einem normierten Raum wird. Ist $\mathscr{B}(W, X)$ die Menge aller $f \in \mathscr{F}(W, X)$, für die $\sup\limits_{t \in W} \|f(t)\| < \infty$ ist, dann ist $\mathscr{B}(W, X)$ ein Vektorunterraum von $\mathscr{F}(W, X)$, der durch $\|f\| = \sup\limits_{t \in W} \|f(t)\|$ zu einem normierten Raum wird.

3.10. *Die Abbildung u mit $u(\varphi) = h \circ \varphi \circ g^{-1} = f$ von $\mathscr{B}(A, \mathbb{R})$ auf $\mathscr{B}(W, X)$ ist eine lineare Isometrie, die normierten Räume $\mathscr{B}(A, \mathbb{R})$ und $\mathscr{B}(W, X)$ sind isomorph.*

Dies folgt unmittelbar aus (3.6.1), denn es ist

$$\sup_{t \in W} \|f(t)\| = \sup_{\tau \in A} |\varphi(\tau)| \,, \quad \text{also} \quad \|f\| = \|\varphi\| \,.$$

Damit ist eine fundamentale Eigenschaft der Abbildungen der Dimensionsanalysis beschrieben, nämlich eine Beziehung zwischen den beschränkten Abbildungen der Dimensionsanalysis und den beschränkten reellwertigen Funktionen einer reellen Veränderlichen.

3.11. Die für Funktionen *einer* Veränderlichen gefundenen Ergebnisse können ohne Schwierigkeit auf Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher ausgedehnt werden. Es genügt, dies für Funktionen zweier unabhängiger Veränderlicher darzulegen.

S, T und X seien Elemente von $\mathfrak{G}_0$, die entsprechenden Elemente s_0, t_0 und x_0 von $\mathfrak{G}_0$ ihre Basen; S, T und X seien gemäß **1.4.** normiert. Dann ist $\sigma \to \sigma s_0$ eine lineare Isometrie von $\mathbb{R}$ auf S, und $\tau \to \tau t_0$ eine von $\mathbb{R}$ auf T. Infolgedessen ist g mit $g(\sigma,\tau) = (s,t)$ eine lineare Isometrie von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ auf $S\times T$. Ist h die lineare Isometrie mit $h(\xi) = \xi x_0$, dann gilt der **3.1.** entsprechende Satz:

3.12. *Ist φ eine Abbildung einer Teilmenge A von* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, dann ist

$$f = h \circ \varphi \circ g^{-1}$$

eine Abbildung der Teilmenge $g(A) = W$ von *$S\times T$ in X, ist f eine Abbildung einer Teilmenge W von $S\times T$ in X, dann ist*

$$\varphi = h^{-1} \circ f \circ g$$

eine Abbildung der Teilmenge $g^{-1}(W) = A$ von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Es ist für alle $(\sigma,\tau)\in A$ bzw. $(s,t)\in g(A) = W$

$$x = f(s,t) = \varphi(\sigma,\tau)x_0 \,. \tag{3.12.1}$$

Zu jedem φ in A gibt es genau ein f in W, und umgekehrt.

Der Beweis verläuft analog dem von **3.1.**. An die Stelle der dort benutzten linearen Isometrie $\tau \to t$ tritt hier die lineare Isometrie $(\sigma,\tau) \to (s,t)$.
Aus (3.12.1) folgt

$$\|f(s,t)\| = |\varphi(\sigma,\tau)| \,. \tag{3.12.2}$$

Die in **3.10.** über Funktionen einer Veränderlichen gemachte Aussage gilt entsprechend modifiziert auch für Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher.

4. Stetige Abbildungen

Von den Abbildungen eines normierten Raumes $T\in\mathfrak{G}_0$ (oder einer Teilmenge von T) in einen normierten Raum $X\in\mathfrak{G}_0$ sollen im folgenden die *stetigen* untersucht werden. Ist I ein offenes (abgeschlossenes) Intervall von $\mathbb{R}$, dann ist $J = g(I)$ ein offenes (abgeschlossenes) Intervall von T, und es gilt

4.1. *Eine Abbildung f eines Intervalls J von T in X ist genau dann im Punkte $t_1\in J$ stetig, wenn die Abbildung $\varphi = u^{-1}(f)$ von I in $\mathbb{R}$ im Punkte $\tau_1 = g^{-1}(t_1)\in I$ stetig ist. f ist genau dann auf J stetig bzw. gleichmäßig stetig, wenn $\varphi = u^{-1}(f)$ auf I stetig bzw. gleichmäßig stetig ist.*

Dies folgt unmittelbar aus **3.1.**. Bei abgeschlossenen Intervallen bedeutet Stetigkeit in einem Endpunkt „einseitige" Stetigkeit.

4.2. Jede *lineare* Abbildung $t \to \alpha(t\,|\,t_0)\,x_0$ von T in X ist auf T gleichmäßig stetig, denn die Abbildung $\varphi = u^{-1}(f)$, d.i. die Abbildung $\tau \to \alpha\tau$ von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, ist auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Ist $\alpha \neq 0$, dann ist φ bijektiv, also auch f; f ist dann ein *Homöo-*

morphismus von T auf X, der auf T gleichmäßig stetig ist. Da der Homöomorphismus f linear ist, ist er ein *Isomorphismus.* Ist $\alpha = 1$, dann ist der Isomorphismus f eine *lineare Isometrie.*

4.3. Die in **3.1.** benutzte *lineare Isometrie* g von $\mathbb{R}$ auf T ist ein Homöomorphismus, der auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

4.4. Die Abbildung $x \to \|x\|$ von X in $\mathbb{R}_+$ ist auf X gleichmäßig stetig, denn für alle $x,\ x' \in X$ gilt:

$$\big|\|x'\| - \|x\|\big| \leqq \|x' - x\| .$$

4.5. Die Abbildung

$$v_{\mathrm{a}}\colon\quad t \to t + a\,, \quad a \in T$$

ist eine *Translation.* Sie ist eine *bijektive affine Abbildung* von T auf T, die auf T gleichmäßig stetig ist. Das gleiche gilt für die *inverse Abbildung*

$$v_{\mathrm{a}}^{-1}\colon\quad t \to t - a\,.$$

v_{a} ist eine Isometrie von T auf T und ein Homöomorphismus, der auf T gleichmäßig stetig ist. Für $a \neq o$ ist v_{a} nicht linear, also kein Isomorphismus.

4.6. Ist I ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall der Zahlengeraden $\mathbb{R}$, dann ist die Menge $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ der auf I stetigen reellwertigen Funktionen einer reellen Veränderlichen ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. In der Analysis wird gezeigt, daß der durch $\|\varphi\| = \sup_{\tau \in I} |\varphi(\tau)|$ normierte Vektorraum $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ ein *Banachraum* ist, d.h., daß jede Cauchyfolge (φ_ν) mit $\varphi_\nu \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ gegen ein $\varphi \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ konvergiert. Die Folge (φ_ν) konvergiert dann auf I gleichmäßig.

Dieses Ergebnis kann auf die in der Dimensionsanalysis auftretenden Räume von Abbildungen übertragen werden. Ist I ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall von $\mathbb{R}$, dann ist $J = g(I)$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall von T, und die Menge $\mathscr{C}(J,X)$ der stetigen Abbildungen von J in X ist ein *Vektorraum über* $\mathbb{R}$.

4.7. *Der durch* $\|f\| = \sup_{t \in J} \|f(t)\|$ *normierte Raum* $\mathscr{C}(J,X)$ *ist ein Banachraum.*

Beweis. Zu jedem $\varphi \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ gehört nach **3.1.** genau ein $f = u(\varphi) \in \mathscr{C}(J,X)$ und umgekehrt, und nach **3.10.** ist $\|f\| = \|\varphi\|$, denn $\mathscr{C}(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{B}(I,\mathbb{R})$ und $\mathscr{C}(J,X) \subset \mathscr{B}(J,X)$. Ist (φ_ν) eine Cauchyfolge in $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$, dann ist $(f_\nu) = (u(\varphi_\nu))$ eine Cauchyfolge in $\mathscr{C}(J,X)$ und umgekehrt. Da $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ ein Banachraum ist, existiert $\lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu = \varphi \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$. Für $f = u(\varphi)$ folgt dann wegen $\|f - f_\nu\| = \|\varphi - \varphi_\nu\|$, daß $\lim_{\nu\to\infty} f_\nu = f \in \mathscr{C}(J,X)$.

4.8. Ist f eine *Funktion mehrerer unabhängiger Veränderlicher*, dann folgt ebenso wie bei den Funktionen einer Veränderlichen die Stetigkeit von f aus der von $\varphi = u^{-1}(f)$. Ist nämlich A eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, und g die lineare Isometrie $(\sigma,\tau) \to (s,t)$ von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ auf $S \times T$, dann ist $g(A) = W$ eine offene Teilmenge von $S \times T$, und es gilt

4.9. *Die Abbildung f von W in X ist genau dann im Punkte $(s_1, t_1) \in W$ stetig, wenn die Abbildung $\varphi = u^{-1}(f)$ von $A = g^{-1}(W)$ in $\mathbb{R}$ im Punkte $(\sigma_1, \tau_1) \in A$ stetig ist. f ist genau dann auf $W = g(A)$ stetig bzw. gleichmäßig stetig, wenn $\varphi = u^{-1}(f)$ auf $A = g^{-1}(W)$ stetig bzw. gleichmäßig stetig ist.*

4.10. Die GV-Struktur E ist durch die drei folgenden Abbildungen gekennzeichnet:

$$(x, y) \to xy \qquad \text{von } X \times Y \text{ in } XY, \tag{I}$$

$$(x, x') \to x + x' \qquad \text{von } X \times X \text{ in } X, \tag{II}$$

$$(\lambda, x) \to \lambda x \qquad \text{von } \mathbb{R} \times X \text{ in } X, \tag{III}$$

wo X und Y Elemente einer kommutativen freien Gruppe $\mathfrak{G}_0$ von endlichem Typus sind. Nach **4.9.** ist jede dieser Abbildungen stetig. Die in **1.6.** auf E eingeführte Topologie ist daher mit der algebraischen Struktur von E verträglich.

5. Ableitung einer stetigen Funktion

5.1. T und X seien normierte Räume aus $\mathfrak{G}_0$, I sei ein offenes Intervall von $\mathbb{R}$, und $J = g(I)$ das entsprechende offene Intervall von T. Ferner sei f eine stetige Abbildung von J in X und $\varphi = u^{-1}(f)$. Wegen $f(t) = \varphi(\tau) x_0$ ist für $t, t_1 \in J$, $t \neq t_1$ der *Differenzenquotient*

$$\frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} = \frac{\varphi(\tau) - (\tau_1)}{\tau - \tau_1} \cdot x_0 t_0^{-1}$$

Element von $XT^{-1} \in \mathfrak{G}_0$.

5.2. *Hat die Abbildung $\varphi = u^{-1}(f)$ in $\tau_1 \in I$ eine Ableitung, dann hat f in $t_1 \in J$ eine Ableitung*, d.h. *es existiert* in $t_1 \in J$

$$\lim_{t \to t_1,\, t \neq t_1} \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} = f'(t_1) = \varphi'(\tau_1) x_0 t_0^{-1},$$

und umgekehrt. Es ist $f'(t_1) \in XT^{-1}$.

Gibt es nämlich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jedes $\tau \neq \tau_1$ mit $|\tau - \tau_1| < \delta$

$$\left| \frac{\varphi(\tau) - \varphi(\tau_1)}{\tau - \tau_1} - \varphi'(\tau_1) \right| < \varepsilon$$

ist, dann gilt für jedes $t \neq t_1$ mit $\|t - t_1\| < \delta$

$$\left\| \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} - \varphi'(\tau_1) x_0 t_0^{-1} \right\| < \varepsilon,$$

und umgekehrt.

Von der Abbildung f sagt man dann, daß sie im Punkte t_1 differenzierbar ist und $f'(t_1) = \varphi'(\tau_1) x_0 t_0^{-1}$ ihre Ableitung ist. Hier ist zu beachten, daß $f'(t_1)$ Element von XT^{-1} ist, während $f(t_1)$ Element von X ist.

5.3. Ist f im Punkte t_1 differenzierbar und $f'(t_1)$ der Wert der Ableitung im Punkte t_1, dann ist

$$x - x_1 = f'(t_1)(t - t_1), \qquad x_1 = f(t_1)$$

die *Gleichung der Tangente im Punkte* t_1. Die Abbildung

$$t - t_1 \to f'(t_1)(t - t_1)$$

ist eine *stetige lineare Abbildung von* T *in* X mit der Norm $\|f'(t_1)\| = |\varphi'(\tau_1)|$.

Eine Abbildung f eines Intervalls J von T in X wird *auf* J *differenzierbar* genannt, wenn f in jedem Punkt von J differenzierbar ist. Die Ableitung f' ist dann eine Abbildung von J in XT^{-1}, es ist

$$f'(t) = \varphi'(\tau)x_0 t_0^{-1}, \qquad \tau \in I.$$

Hat die Abbildung φ in I eine ν-te Ableitung $\varphi^{(\nu)}$, dann hat $f = u(\varphi)$ in J eine ν-te Ableitung $f^{(\nu)}$; es ist

$$f^{(\nu)}(t) = \varphi^{(\nu)}(\tau)x_0 t_0^{-\nu};$$

$f^{(\nu)}$ ist eine Abbildung von J in $XT^{-\nu}$.

5.4. *Beispiele*

a) Es sei $I = \mathbb{R}_+^*$ und $\varphi(\tau) = \ln \tau$. Dann ist

$$f\colon \quad t \to (\ln \tau)x_0$$

eine Bijektion von $\mathbb{R}_+^* t_0$ auf X. Die auf $\mathbb{R}_+^* t_0$ existierende Ableitung

$$f'\colon \quad t \to \frac{1}{\tau} x_0 t_0^{-1} = x_0 t^{-1}$$

ist eine Bijektion von $\mathbb{R}_+^* t_0$ auf $\mathbb{R}_+^* x_0 t_0^{-1}$.

b) Es sei $I = \mathbb{R}_+^*$ und $\varphi(\tau) = \tau^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Dann ist

$$f\colon \quad t \to (\tau^\alpha)x_0$$

eine Bijektion von $\mathbb{R}_+^* t_0$ auf $\mathbb{R}_+^* x_0$. Die auf $\mathbb{R}_+^* t_0$ existierende Ableitung

$$f'\colon \quad t \to (\alpha\tau^{\alpha-1})x_0 t_0^{-1} = \alpha x t^{-1}$$

ist eine Bijektion von $\mathbb{R}_+^* t_0$ auf $\mathbb{R}_+^* x_0 t_0^{-1}$ für $\alpha > 0$, auf $\mathbb{R}_-^* x_0 t_0^{-1}$ für $\alpha < 0$.

5.5. Bei der Definition der *partiellen Ableitungen* von stetigen *Funktionen mehrerer Veränderlicher* wird in entsprechender Weise vorgegangen. Haben A und W die in **4.9.** angegebene Bedeutung, und ist f eine stetige Abbildung der Teilmenge W von $S \times T$ in X, $\varphi = u^{-1}(f)$ die f entsprechende Abbildung der Teilmenge A von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, dann ist nach (3.6.2) für $(s, t_1) \in W$ und $(s_1, t_1) \in W$, $s \neq s_1$,

$$\frac{f(s,t_1) - f(s_1,t_1)}{s - s_1} = \frac{\varphi(\sigma,\tau_1) - \varphi(\sigma_1,\tau_1)}{\sigma - \sigma_1} \cdot x_0 s_0^{-1}.$$

Existiert die partielle Ableitung $\varphi_\sigma(\sigma_1,\tau_1)$, dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{s\to s_1,\, s\neq s_1} \frac{f(s,t_1)-f(s_1,t_1)}{s-s_1} = \varphi_\sigma(\sigma_1,\tau_1)x_0 s_0^{-1},$$

und umgekehrt. Dieser Grenzwert ist die *partielle Ableitung von f nach s im Punkte* (s_1,t_1). Es ist

$$f_s(s_1,t_1) = \varphi_\sigma(\sigma_1,\tau_1)\, x_0 s_0^{-1} \in XS^{-1}.$$

In entsprechender Weise ergibt sich

$$f_t(s_1,t_1) = \varphi_\tau(\sigma_1,\tau_1)\, x_0 t_0^{-1} \in XT^{-1}.$$

f ist genau dann im Punkte $(s_1,t_1) \in W$ *differenzierbar*, wenn $\varphi = u^{-1}(f)$ im Punkte $(\sigma_1,\tau_1) \in A$ differenzierbar ist. In (s_1,t_1) gibt es dann eine *Tangentenebene*

$$x - x_1 = f_s(s_1,t_1)(s-s_1) + f_t(s_1,t_1)(t-t_1),$$

und

$$(s-s_1, t-t_1) \to f_s(s_1,t_1)(s-s_1) + f_t(s_1,t_1)(t-t_1)$$

ist eine *stetige lineare Abbildung* von $S \times T$ in X. Das *vollständige Differential* von f im Punkte (s_1,t_1) ist

$$\mathrm{d}f = f_s(s_1,t_1)\,\mathrm{d}s + f_t(s_1,t_1)\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}f \in X.$$

Bei der Definition der partiellen Ableitungen zweiter und höherer Ordnung ist in entsprechender Weise zu verfahren.

6. Stammfunktion, Integral

Es sei ψ eine auf dem Intervall I von $\mathbb{R}$ differenzierbare Abbildung von I in $\mathbb{R}$, und es sei $\psi'(\tau) = \varphi(\tau)$ für alle $\tau \in I$. In der reellen Analysis wird jede solche Abbildung ψ eine *Stammfunktion* (Primitive) von φ bezüglich I genannt. Sind ψ_1 und ψ_2 irgend zwei Stammfunktionen von φ bezüglich I, dann ist $\psi_1 - \psi_2$ in I konstant, d.h. $\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau) = \gamma \in \mathbb{R}$ für alle $\tau \in I$.

6.1. Der Begriff der *Stammfunktion* kann danach wie folgt in den Größenkalkül eingeführt werden. Ist $J = It_0$ ein Intervall von T, dann ist von den beiden Abbildungen

$$p\colon t \to \psi(\tau)x_0 t_0, \qquad f\colon t \to \varphi(\tau)x_0$$

die erste eine Abbildung von J in XT, die zweite eine Abbildung von J in X. Ist $\psi'(\tau) = \varphi(\tau)$ für alle $\tau \in I$, dann ist $p'(t) = f(t)$ für alle $t \in J$.

6.2. *Definition. Es sei f eine Abbildung eines Intervalles J von T in X. Jede Abbildung p von J in XT mit der Eigenschaft $p'(t) = f(t)$ für alle $t \in J$, wird eine Stammfunktion der Abbildung f bezüglich J genannt.*

Sind p_1 und p_2 irgend zwei Stammfunktionen von f bezüglich J, dann ist $p_1 - p_2$ in J konstant, also $p_1(t) - p_2(t) = c \in XT$ für alle $t \in J$.

Jede auf einem Intervall J von T stetige Abbildung f von J in X hat eine Stammfunktion p bezüglich J mit $p(t) \in XT$.

Dies folgt unmittelbar daraus, daß jede auf einem Intervall I von $\mathbb{R}$ stetige Abbildung φ von I in $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion bezüglich I hat.

6.3. *Beispiel.* Es sei $I = \mathbb{R}_+^*$ und $J = \mathbb{R}_+^* t_0$ das Bild von I in T. Die Abbildung f von J in T^{-1} mit $f(t) = t^{-1}$ ist auf J stetig. Infolgedessen ist die Abbildung $\varphi = u^{-1}(f)$ von $\mathbb{R}_+^*$ in $\mathbb{R}$ mit $\varphi(\tau) = \tau^{-1}$ auf $\mathbb{R}_+^*$ stetig, und die Abbildung ψ von $\mathbb{R}_+^*$ in $\mathbb{R}$ mit $\psi(\tau) = \ln \tau$ eine Stammfunktion von φ auf $\mathbb{R}_+^*$. Somit ist die Abbildung p von $\mathbb{R}_+^* t_0$ in K mit $p(t) = (\ln \tau) e_0$ eine Stammfunktion von f auf J. Beachte, daß hier $X = T^{-1}$ und daher $p(t) \in XT = T^{-1}\, T = K$ ist. Unter Benutzung von (2.6.1) ergibt sich $p(t) = (\ln (t \mid t_0))\, e_0$. Damit ist die Logarithmusfunktion als Stammfunktion von t^{-1} eingeführt (vgl. hierzu das unter **2.7.3.** und **3.3.** über die Logarithmusfunktion Gesagte).

6.4. Von der Stammfunktion gelangt man in der folgenden Weise zum *bestimmten Integral* (nach Cauchy). Sind p_1 und p_2 irgend zwei Stammfunktionen von f auf $J = I t_0$, so folgt aus $p_1(t) - p_2(t) = \text{const.}$ für alle $t \in J$, daß für alle $t_1, t_2 \in J$

$$p_2(t_2) - p_2(t_1) = p_1(t_2) - p_1(t_1)\,.$$

Diese Differenz hat also für jede Stammfunktion p von f denselben Wert. In Anlehnung an die Definition des bestimmten Integrals (nach Cauchy) in der reellen Analysis werde definiert:

Ist p eine Stammfunktion von f bezüglich J, und sind t_1 und t_2 beliebige Punkte von J, dann wird die Differenz $p(t_2) - p(t_1)$ das bestimmte Integral von f über das Intervall $[t_1, t_2]$ von J genannt, und man schreibt:

$$p(t_2) - p(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Aus $p(t) = \psi(\tau) x_0 t_0$ folgt $p(t_2) - p(t_1) = (\psi(\tau_2) - \psi(\tau_1)) x_0 t_0$. Mit $\psi'(\tau) = \varphi(\tau)$ ergibt sich hieraus

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) x_0 t_0\,. \tag{6.4.1}$$

Ist $f(t) \in X$, dann ist $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t \in XT$.

6.5. Über die Gleichung (6.4.1) kann das bestimmte *Riemannsche* bzw. *Lebesguesche* Integral wie folgt eingeführt werden. Es sei I ein beschränktes Intervall von $\mathbb{R}$ und $\varphi \in \mathscr{B}(I, \mathbb{R})$ auf I im Riemannschen bzw. Lebesgueschen Sinne integrierbar. Dann existiert das bestimmte Integral über φ für jedes Teilintervall von I.

Definition. Es sei J ein beschränktes Intervall von T. Eine Abbildung $f \in \mathscr{B}(J, X)$ wird auf J im Riemannschen bzw. Lebesgueschen Sinne integrierbar genannt, wenn $\varphi = u^{-1}(f) \in \mathscr{B}(I, \mathbb{R})$ auf $I = g^{-1}(J)$ im Riemannschen bzw. Lebesgueschen Sinne integrierbar ist; sind τ_1 und τ_2 die Endpunkte eines Teilintervalles von I und ist $t_1 = g(\tau_1)$, $t_2 = g(\tau_2)$, dann werde gesetzt

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) x_0 t_0\,. \tag{6.5.1}$$

6.6. Der folgende Satz gibt eine obere Schranke für die *Norm eines bestimmten Integrals.*

Ist I ein beschränktes Intervall mit den Endpunkten τ_1 und τ_2 und f eine auf $J = g(I)$ beschränkte und integrierbare Abbildung von J in X, dann ist

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqq \|t_2 - t_1\| \sup_{t \in J} \|f(t)\| .$$

Beweis: Aus (6.5.1) folgt

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t \right\| = \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right| .$$

Es ist $\left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right| \leqq |\tau_2 - \tau_1| \cdot \sup_{\tau \in I} |\varphi(\tau)|$, und nach **3.2.** ist $\sup_{t \in J} \|f(t)\| = \sup_{\tau \in I} |\varphi(\tau)|$, woraus sich die Behauptung ergibt.

6.7. *Beispiel.* Die Abbildung φ habe auf dem beschränkten abgeschlossenen Intervall $I = [\tau_1, \tau_2]$ eine stetige Ableitung, und es sei $\varphi(\tau) > 0$ für alle $\tau \in I$. Dann ist

$$p\colon \quad t \to (\ln \varphi(\tau))\, x_0 t_0$$

eine stetige Abbildung von $J = It_0$ in XT. Da φ auf I differenzierbar ist, ist p auf J differenzierbar;

$$p'\colon \quad t \to \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)}\, x_0$$

ist eine stetige Abbildung von J in X, denn φ' ist auf I stetig und φ ist dort positiv. Es ist nach Definition

$$\int_{t_1}^{t_2} p'(t)\,\mathrm{d}t = \left(\ln \frac{\varphi(\tau_2)}{\varphi(\tau_1)} \right) x_0 t_0 . \tag{6.7.1}$$

Wird durch $f(t) = \varphi(\tau)\, x_0$ eine Abbildung f von J in X eingeführt, dann ist $p'(t) = (f'(t)/f(t))\, x_0 t_0$ und daher nach (6.7.1)

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t = \left(\ln \frac{\varphi(\tau_2)}{\varphi(\tau_1)} \right) e_0 = \left(\ln \left(\frac{(x_2 \mid x_1)}{(x_1 \mid x_1)} \right) \right) e_0 \in K , \tag{6.7.2}$$

wobei $x_\lambda = f(t_\lambda)$ für $\lambda = 1,2$ (vgl. **2.6.**).

Ist f die identische Abbildung von T in T, also $f(t) = t$, dann ist $f'(t) = e_0$, und es folgt aus (6.7.2)

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \left(\ln \left(\frac{(t_2 \mid t_1)}{(t_1 \mid t_1)} \right) \right) e_0 \in K .$$

7. Differentialgleichungen

7.1. Die Vektorräume $T \in \mathfrak{G}_0$ und $X \in \mathfrak{G}_0$ seien gemäß **1.4.** normiert. Ferner sei I ein Intervall aus $\mathbb{R}$, $J = It_0$ das Bild von I in T und f eine auf $J \times X$ definierte Abbildung. Die allgemeine explizite Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x) \tag{7.1.1}$$

ist genau dann eine Differentialgleichung im Sinne der Dimensionsanalysis, wenn auf beiden Seiten von (7.1.1) Elemente desselben normierten Raumes $XT^{-1} \in \mathfrak{G}_0$ stehen, wenn also f eine Abbildung von $J \times X$ in XT^{-1} ist. Eine Differentialgleichung wie $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x$ ist i.a. keine Differentialgleichung im Sinne der Dimensionsanalysis, da links ein Element von XT^{-1} steht, rechts ein Element von X. Diese beiden Vektorräume sind genau dann disjunkt, wenn $T \neq K$ ist. Ein Analogon zur Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x$, bei welchem auch für $T \neq K$ eine Differentialgleichung im Sinne der Dimensionsanalysis vorliegt, ist beispielsweise

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha \frac{x}{t_0}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^* .$$

7.2. Im folgenden wird vorausgesetzt, daß f eine stetige Abbildung von $J \times X$ in XT^{-1} ist.

Eine stetige Abbildung v von J in X wird eine *Lösung der Differentialgleichung* (7.1.1) genannt, wenn v auf J eine stetige Ableitung v' hat und $v'(t) = f(t, v(t))$ für alle $t \in J$.

7.3. Es möge hier davon abgesehen werden, allgemeine Sätze über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung (7.1.1) zu erörtern. Die Aussagen der bekannten Sätze der Analysis über die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau} = \varphi(\tau, \xi)$ lassen sich vermöge der linearen Isometrien g und h (vgl. **3.10.**) ohne Schwierigkeit auf die Differentialgleichung (7.1.1) übertragen. Im Rahmen dieser Darstellung wird es genügen, einige den Anwendungen nahestehende typische Beispiele vorzuführen. Selbstverständlich handelt es sich bei diesen Beispielen um Differentialgleichungen im Sinne der Dimensionsanalysis.

7.4. Die Differentialgleichung

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \alpha\, x/t\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^* \tag{7.4.1}$$

ist eine lineare erster Ordnung. Es sei $I = \mathbb{R}^*_+$ also $J = \mathbb{R}^*_+ t_0$, und v eine Lösung von (7.4.1) auf J, also für alle $t \in J$

$$v'(t) = \alpha\, v(t)/t\,. \tag{7.4.2}$$

Ist $v(t) \neq o$ für alle $t \in J$, dann folgt aus (7.4.2)

$$v'(t)/v(t) = \alpha\, t^{-1}\,. \tag{7.4.3}$$

Beide Seiten von (7.4.3) sind Elemente von $T^{-1} \in \mathfrak{G}_0$. Die Abbildungen $t \to v'(t)/v(t)$ und $t \to t^{-1}$ sind auf J stetig, haben also auf J eine Stammfunktion. Aus (7.4.3) folgt daher durch Integration

$$\int_{t_1}^{t} \frac{v'(t)}{v(t)}\,\mathrm{d}t = \alpha \int_{t_1}^{t} \frac{\mathrm{d}t}{t}, \qquad t, t_1 \in J$$

und somit $\ln\left(\frac{(y \mid y_1)}{(y_1 \mid y_1)}\right) = \alpha \ln\left(\frac{(t \mid t_1)}{(t_1 \mid t_1)}\right)$ mit $y = v(t)$ und $y_1 = v(t_1)$,

also
$$v(t) = \left(\frac{(t \mid t_1)}{(t_1 \mid t_1)}\right)^{\alpha} v(t_1)\,.$$

(Vgl. das unter **6.7.** angeführte Beispiel für ein Integral.)

Die der Anfangsbedingung $v(t_1) = x_1$ genügende Lösung von (7.4.1) ist die folgende Abbildung v von J in X:

$$v\colon \quad t \to \left(\frac{(t \mid t_1)}{(t_1 \mid t_1)}\right)^{\alpha} x_1\,.$$

Sie ist die einzige Lösung der Anfangswertaufgabe, und wird gewöhnlich

$$x = v(t) = \left(\frac{(t \mid t_1)}{(t_1 \mid t_1)}\right)^{\alpha} x_1$$

geschrieben.

Bemerkungen.

a) Das *allgemeine Integral* von (7.4.1) wird durch das Verfahren der Trennung der Veränderlichen erhalten. Es ist

$$\left(\frac{(x \mid x_1)}{(x_1 \mid x_1)}\right)\left(\frac{(t \mid t_1)}{(t_1 \mid t_1)}\right)^{-\alpha} = \gamma\,, \qquad \gamma \in \mathbb{R}_+^*\,.$$

b) Die *allgemeine Potenz* kann über die Differentialgleichung (7.4.1) eingeführt werden. Jede Abbildung $f\colon t \to t^{\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{Z}^*$ von $\mathbb{R}_+^* t_0$ in $T^{\alpha} \in \mathfrak{G}_0$ ist auf $\mathbb{R}_+^* t_0$ Lösung von (7.4.1). Erweiterung von $\mathbb{Z}^*$ auf $\mathbb{R}^*$ führt auf die allgemeine Potenz.

7.5. Fließt Wasser aus einem zylindrischen Gefäß vom Radius r_1 durch eine im Boden angebrachte kreisrunde Öffnung vom Radius ϱr_1 $(0 < \varrho < 1)$, dann genügt die von der Zeit t abhängige, vom Gefäßboden aus gemessene Höhe x des Wasserspiegels der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\alpha\sqrt{2gx}\,, \qquad \alpha = \gamma\varrho^2\,, \qquad 0 < \gamma < 1\,, \tag{7.5.1}$$

wobei $g \in XT^{-2}$ die Erdbeschleunigung und γ ein die Reibung berücksichtigender Zahlenfaktor ist. Zu Beginn des Vorganges, d.h. für $t = o$, habe der Wasserspiegel die Höhe $x_1 \in \mathbb{R}_+^* x_0$. (7.5.1) ist eine Differentialgleichung der Dimensionsanalysis, denn auf beiden Seiten stehen Elemente von XT^{-1} (Geschwindigkeiten). Wegen der Interpretation der in (7.5.1) auftretenden Wurzel sei auf Anhang **1.3.**, Beispiel a) verwiesen.

Ist f eine Lösung von (7.5.1), d.h. eine Abbildung von $\mathbb{R}_+ t_0$ in X, dann gibt es wegen $f(o) = x_1 > o$ ein $t_1 > o$, so daß $f(t) > o$ für alle $t \in [o, t_1]$, und es folgt aus (7.5.1)

$$g f'(t) / \sqrt{2 g f(t)} = -\alpha g , \qquad t \in [o, t_1] . \tag{7.5.2}$$

Auf beiden Seiten von (7.5.2) stehen Elemente von XT^{-2} (Beschleunigungen). Eine Stammfunktion der linken Seite von (7.5.2) ist $\sqrt{2 g f(t)} \in XT^{-1}$. Damit ergibt sich aus (7.5.2) durch Integration

$$\sqrt{2 g f(t)} - \sqrt{2 g f(o)} = -\alpha g t , \qquad t \in [o, t_1] .$$

Mit $f(t) = x$ und der Anfangsbedingung $f(o) = x_1$ folgt

$$t = f^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{(2x_1)/g} - \sqrt{(2x)/g} \right) .$$

Es ist

$$\lim_{x \to o,\, x \in \mathbb{R}_+^* x_0} f^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{(2x_1)/g} ,$$

d.i. die Zeit, nach welcher das Gefäß leergelaufen ist.

7.6. Die *Differentialgleichung der freien gedämpften Schwingungen* lautet in ihrer einfachsten Form

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = o . \tag{7.6.1}$$

Dabei bedeutet $t \in T$ die Zeit, $x \in X$ die Auslenkung aus der Ruhelage; a, b, c sind (von x und t unabhängige) Konstanten (a Masse, b Dämpfungskonstante, c Federkonstante). Für $a \neq o$ ergibt sich aus der linearen homogen Differentialgleichung zweiter Ordnung (7.6.1)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + qx = o , \tag{7.6.2}$$

mit $p = b/a$ und $q = c/a$. Jeder Summand der linken Seite von (7.6.2) ist Element von $X^1 T^{-2}$ (Beschleunigungen). Daraus folgt

$$p \in T^{-1} , \qquad q \in T^{-2} .$$

Die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (7.6.2) lautet

$$r^2 + pr + q = o . \tag{7.6.3}$$

Wegen $q \in T^{-2}$ sind die auf der linken Seite von (7.6.3) stehenden Summanden Elemente von T^{-2}. Daraus folgt $r \in T^{-1}$.

a) Ist $p^2 > 4q$, d.h. $p^2 - 4q \in \mathbb{R}_+^* t_0^{-2}$, dann ist die Gesamtheit der Lösungen der Differentialgleichung (7.6.1) durch die Abbildungen

$$t \to x_1 \, e^{-\varrho_1 (t | t_0)} + x_2 \, e^{-\varrho_2 (t | t_0)}$$

gegeben, wobei x_1, x_2 beliebige Elemente von X,

$$r_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} , \qquad r_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

die Lösungen von (7.6.3) und ϱ_1, ϱ_2 die Koordinaten von r_1, r_2 bezüglich der Basis t_0^{-1} des Vektorraumes T^{-1} sind (wegen der hier auftretenden Wurzeln vgl. Anhang **1.3.**).

b) Ist $p^2 < 4q$, d.h. $4q - p^2 \in \mathbb{R}_+^* t_0^{-2}$, dann gibt es keine Lösungen von (7.6.3), welche Elemente des Vektorraums T^{-1} über $\mathbb{R}$ sind. Es ist jedoch in diesem Fall $s = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ Element des letztgenannten Vektorraums, und die Gesamtheit der Lösungen von (7.6.1) ist durch die Abbildungen

$$t \to \mathrm{e}^{-(\bar{\omega}/2)(t \mid t_0)} (x_1 \cos \sigma (t \mid t_0) + x_2 \sin \sigma (t \mid t_0))$$

gegeben, wo x_1 und x_2 irgendwelche Elemente von X und $\bar{\omega}$ bzw. σ die Koordinaten von p bzw. s bezüglich der Basis t_0^{-1} des Vektorraumes T^{-1} sind. Dieses Ergebnis kann unmittelbar durch Einsetzen in (7.6.1) bestätigt werden; es kann auch dadurch gewonnen werden, daß T als Vektorraum über $\mathbb{C}$ betrachtet wird.

c) Ist $p^2 = 4q$, dann ist die Abbildung $t \to x_1 \mathrm{e}^{-(\bar{\omega}/2)(t \mid t_0)}$ eine Lösung von (7.6.1), wobei $\bar{\omega}$ die oben angegebene Bedeutung hat. Eine zweite von dieser Lösung linear unabhängige ergibt sich mit Hilfe der d'Alembertschen Reduktionsmethode. Die Gesamtheit der Lösungen ist durch die Abbildungen

$$t \to (x_1 + ct)\, \mathrm{e}^{-(\bar{\omega}/2)(t \mid t_0)}, \qquad x_1 \in X, \quad c \in XT^{-1}$$

gegeben.

In allen drei Fällen sind die Argumente der auftretenden elementaren Funktionen reelle Zahlen.

7.7. Die Differentialgleichung für die *Transversalschwingungen einer gespannten Saite* ist die lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{7.7.1}$$

Hierin ist $t \in T$ und $x, y \in X$; infolgedessen ist $c \in XT^{-1}$. Jede Abbildung f von $T \times X$ in X, bei der für alle $(t,x) \in T \times X$

$$f_{tt}(t,x) = c^2 f_{xx}(t,x)$$

ist, ist eine Lösung von (7.7.1). Offensichtlich sind die Abbildungen $(t,x) \to x + ct$, $(t,x) \to x - ct$ Lösungen von (7.7.1). Sind p_1, p_2 irgendwelche Abbildungen von X in X und hat jede dieser Abbildungen eine stetige zweite Ableitung, dann ist auch die Abbildung

$$f\colon \quad (t,x) \to p_1 (x + ct) + p_2 (x - ct)$$

eine Lösung von (7.7.1).

Anhang I

Einheiten mit nichtganzzahligem Exponenten

In der einschlägigen Literatur sind häufig „Einheiten" wie $m^{1/2}, s^{-3/2}, \ldots$ anzutreffen, also „Einheiten" mit einem Exponenten, der eine *gebrochen rationale* Zahl, gelegentlich sogar eine *irrationale* Zahl ist. Ist die Verwendung derartiger Einheiten berechtigt oder kann sie durch Einführung eines geeigneten Einheitensystems gerechtfertigt werden? Die Untersuchung dieser Frage bringt wertvolle Ergänzungen zu den in **2.7.4.** und **3.4.** über die „allgemeine Potenz" gemachten Aussagen.

1. Im Vorangehenden wurde den Betrachtungen eine kommutative freie Gruppe $\mathfrak{G}_0$ von *endlichem* Typus zugrundegelegt,

$$\mathfrak{G}_0 = \{a_1^{\alpha_1} \cdots a_\varrho^{\alpha_\varrho} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho \in \mathbb{Z}\}.$$

Das durch $\mathfrak{G}_0$ charakterisierte System von physikalischen Einheiten hat die folgenden Eigenschaften:

a) es hat *endlich* viele Basiseinheiten,

b) jede Einheit des Systems ist ein Potenzprodukt, dessen Faktoren ganzzahlige Potenzen der Basiseinheiten sind.

Zunächst wird untersucht, wann innerhalb eines Einheitensystems $\mathfrak{G}_0$ die Verwendung von Einheiten berechtigt ist, deren Exponenten gebrochen rationale Zahlen sind. Dabei wird die folgende Ausdrucksweise benutzt:

Gibt es zu einem Element $x \in \mathfrak{G}_0$ und zu einer natürlichen Zahl ν ein Element $y \in \mathfrak{G}_0$, so daß $x^\nu = y$ ist, dann sagen wir, daß x in $\mathfrak{G}_0$ eine ν-te Wurzel hat und schreiben $y = x^{1/\nu}$.

Hat x in $\mathfrak{G}_0$ eine ν-te Wurzel, dann hat jedes Element x^μ mit $\mu \in \mathbb{Z}$ in $\mathfrak{G}_0$ eine ν-te Wurzel, denn aus $x^{1/\nu} \in \mathfrak{G}_0$ folgt $(x^{1/\nu})^\mu \in \mathfrak{G}_0$ für alle $\mu \in \mathbb{Z}$ und es ist $(x^{1/\nu})^\mu = (x^\mu)^{1/\nu}$.

2. *Das Element* $x = a_1^{\alpha_1} \cdots a_\varrho^{\alpha_\varrho} \in \mathfrak{G}_0$ *hat genau dann eine ν-te Wurzel in* $\mathfrak{G}_0$, *wenn ν ein Teiler von* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho)$ *ist.*

Ist nämlich φ: $\mathfrak{G}_0 \to \Gamma$ der Isomorphismus von $\mathfrak{G}_0$ auf den unendlichen freien $\mathbb{Z}$-Modul Γ vom Typus ϱ mit der Basis

$$\omega_1 = (1,0,\ldots,0), \ldots, \omega_\varrho = (0,\ldots,0,1)$$

(vgl. [2], § 10, S. 50; [3], § 1, S. 17ff.), dann ist

$$\varphi(x) = \alpha_1 \omega_1 + \cdots + \alpha_\varrho \omega_\varrho,$$

und

$$\varphi(y) = \frac{1}{\nu}\varphi(x) = \frac{\alpha_1}{\nu}\omega_1 + \cdots + \frac{\alpha_\varrho}{\nu}\omega_\varrho$$

ist genau dann Element von Γ, wenn ν ein Teiler jeder der Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho$ ist. Genau dann ist $y \in \mathfrak{G}_0$, d.h. x hat genau dann in $\mathfrak{G}_0$ eine ν-te Wurzel.

Es ist leicht zu bestätigen, daß die Menge derjenigen Elemente von $\mathfrak{G}_0$, die in $\mathfrak{G}_0$ eine ν-te Wurzel haben, eine *Untergruppe* von $\mathfrak{G}_0$ ist.

3. *Beispiele.* a) Bei der Beschreibung des freien Falls tritt $(2gh)^{1/2}$ als Potenz mit dem Exponenten 1/2 auf (g Erdbeschleunigung, h Fallhöhe). Wird den Betrachtungen wie in der Kinematik üblich die kommutative freie Gruppe

$$\mathfrak{G}_0 = \{\mathrm{m}^{\alpha_1}\,\mathrm{s}^{\alpha_2} \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}\}\,, \qquad \text{(m Meter, s Sekunde)}$$

zugrunde gelegt, dann wird $2gh$ in der Einheit $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$ gemessen. Da 2 ein Teiler von $(2, -2)$ ist, ist $(\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2})^{1/2} = \mathrm{m}^1\,\mathrm{s}^{-1} \in \mathfrak{G}_0$.

Danach ist die Schreibweise $(2gh)^{1/2}$ oder auch $\sqrt{2gh}$ bei Verwendung der im Beispiel genannten Gruppe $\mathfrak{G}_0$ korrekt. Nicht korrekt ist hingegen die Schreibweise $\sqrt{2}\,g^{1/2}h^{1/2}$, denn weder $\mathrm{m}^1\,\mathrm{s}^{-2}$ (Einheit von g) noch $\mathrm{m}^1\,\mathrm{s}^0$ (Einheit von h) haben in $\mathfrak{G}_0$ eine Quadratwurzel.

Ein instruktives Analogon tritt beim Rechnen mit Zahlen auf. Die Mengen $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ und $\mathbb{C}^*$ sind multiplikative Gruppen. In $\mathbb{Q}^*$ ist $\sqrt{4} = \sqrt{2\cdot 2} = 2$ korrekt, $\sqrt{4} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ nicht; in $\mathbb{R}^*$ ist $\sqrt{4} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ korrekt, $\sqrt{4} = \sqrt{(-2)}\cdot\sqrt{(-2)}$ nicht, und in $\mathbb{C}^*$ ist $\sqrt{4} = 2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{(-2)}\cdot\sqrt{(-2)}$ korrekt.

b) Das folgende Beispiel ist [1], S. 152 entnommen. Wird die in der Mechanik gebräuchliche kommutative freie Gruppe

$$\mathfrak{G}_0 = \{\mathrm{m}^{\alpha_1}\,\mathrm{kg}^{\alpha_2}\,\mathrm{s}^{\alpha_3} \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}\}$$

vom Typus 3 verwendet (MKS-System), dann sind

$$y_1 = \mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{kg}^1\,\mathrm{s}^{-2}\,, \qquad y_2 = \mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}^1\,\mathrm{s}^{-2}\,, \qquad y_3 = \mathrm{m}^{-3}\,\mathrm{kg}^1\,\mathrm{s}^0$$

Elemente von $\mathfrak{G}_0$ (Einheit des Druckes, der Energie, der Massendichte). Das Element $x = y_1^5\,y_2^{-2}\,y_3^{-3}$ hat in $\mathfrak{G}_0$ eine 6-te Wurzel, denn

$$x^{1/6} = (y_1^5\,y_2^{-2}\,y_3^{-3})^{1/6} = \mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Die Schreibweise

$$x^{1/6} = y_1^{5/6}\,y_2^{-1/3}\,y_3^{-1/2}$$

ist inkorrekt, denn in $\mathfrak{G}_0$ hat weder y_1 eine 6-te, noch y_2 eine 3-te, noch y_3 eine 2-te Wurzel.

Ist $z_\lambda = \eta_\lambda y_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, 3$) mit $\eta_\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, dann ist

$$(z_1^5\,z_2^{-2}\,z_3^{-3})^{1/6} = (\eta_1^{5/6}\,\eta_2^{-1/3}\,\eta_3^{-1/2})\,\mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^{-1}$$

eine korrekte Schreibweise, aber $z_1^{5/6}\,z_2^{-1/3}\,z_3^{-1/2}$ nicht.

4. Wie die bisherigen Überlegungen zeigen, ist bei einem aus *endlich* vielen Basiseinheiten erzeugten Einheitensystem die uneingeschränkte Verwendung von Einheiten mit gebrochenen Exponenten nicht gerechtfertigt, denn in einem solchen Einheitensystem haben für $\nu \geqq 2$ nicht alle Einheiten eine ν-te Wurzel. Es erhebt sich die Frage, ob es ein umfassenderes, das ursprüngliche Einheitensystem $\mathfrak{G}_0$ enthaltendes Einheitensystem $\mathfrak{L}$ mit *endlich* vielen Basiseinheiten gibt, so daß für $\nu \geqq 2$ alle Einheiten des Systems $\mathfrak{G}_0$ in $\mathfrak{L}$ eine ν-te Wurzel haben.

In der Sprache der Algebra formuliert lautet die Frage: Gibt es eine kommutative freie Gruppe $\mathfrak{L}$ von *endlichem* Typus, und in dieser eine zu $\mathfrak{G}_0$ isomorphe Untergruppe $\mathfrak{H}$, so daß jedes Element von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{L}$ eine ν-te Wurzel hat, und zwar

a) für *eine* feste natürliche Zahl $\nu \geqq 2$,

b) für *alle* natürlichen Zahlen?

Es handelt sich hier um das bekannte algebraische Problem der „Einbettung" einer kommutativen Gruppe $\mathfrak{G}_0$ in eine Gruppe $\mathfrak{L}$.

Da jede kommutative freie Gruppe von endlichem Typus isomorph zu einem freien $\mathbb{Z}$-Modul von endlichem Typus ist, und jeder solche $\mathbb{Z}$-Modul als direkte Summe von freien $\mathbb{Z}$-Moduln vom Typus 1 geschrieben werden kann, genügt es, die Aussagen für freie $\mathbb{Z}$-Moduln vom Typus 1, bzw. für kommutative freie Gruppen vom Typus 1 (unendliche zyklische Gruppen) zu formulieren.

Ist $\mathfrak{G}_0$ die unendliche zyklische Gruppe mit der Erzeugenden m, dann ist der zu $\mathfrak{G}_0$ isomorphe freie $\mathbb{Z}$-Modul der Modul $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, und das Kriterium **2.** geht in die folgende elementare Aussage über:

Eine ganze Zahl ist genau dann durch die natürliche Zahl ν teilbar, wenn sie Element des Untermoduls $\nu\mathbb{Z} = \{\nu\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}\}$ ist.

Der zu $\mathbb{Z}$ isomorphe Untermodul $\nu\mathbb{Z}$ ist für $\nu \geqq 2$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{Z}$.

5. Daraus ergibt sich unmittelbar eine Antwort für Fall a) der oben formulierten Frage. Wird nämlich auf der Menge $L_\nu = \mathbb{Z} \times \{\nu\}$ durch

$$(\alpha,\nu) + (\beta,\nu) = (\alpha + \beta,\nu)$$

eine Addition definiert, dann ist L_ν ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Typus 1 mit der Erzeugenden $(1,\nu)$. Die Menge $H_\nu = \nu\mathbb{Z} \times \{\nu\}$ ist ein zu $\mathbb{Z}$ isomorpher Untermodul von L_ν; H_ν hat die Erzeugende $(\nu,\nu) = \nu(1,\nu)$, jedes Element von H_ν ist daher durch ν teilbar. Für $\nu \geqq 2$ sind die Erzeugenden von L_ν und H_ν verschieden, H_ν ist dann eine echte Untermenge von L_ν.

Ist ν das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der natürlichen Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_\varkappa$, so ist jedes Element von $H_\nu = \nu Z \times \{\nu\}$ in L_ν durch jede der Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_\varkappa$ teilbar.

Werden die soeben für additive Verknüpfung erhaltenen Ergebnisse für multiplikative Verknüpfung formuliert, dann entspricht dem Modul L_ν die unendliche zyklische Gruppe $\mathfrak{L}_\nu = \{(m^\alpha, m^\nu) \mid \alpha \in \mathbb{Z}\}$, deren Elemente durch

$$(m^\alpha, m^\nu) \otimes (m^\beta, m^\nu) = (m^{\alpha+\beta}, m^\nu)\,, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$$

multiplikativ verknüpft sind; Erzeugende von $\mathfrak{L}_\nu$ ist $q = (m^1, m^\nu)$. Dem Untermodul H_ν von L_ν entspricht die Untergruppe $\mathfrak{H}_\nu = \{(m^{\alpha\nu}, m^\nu) \mid \alpha \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathfrak{L}_\nu$. $\mathfrak{H}_\nu$ hat die Erzeugende $(m^\nu, m^\nu) = q^\nu$. Da $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{H}_\nu$ isomorph sind, ist q^ν die der Erzeugenden m von $\mathfrak{G}_0$ entsprechende Erzeugende von $\mathfrak{H}_\nu$.

6. In der Sprache der Physik lauten die Ergebnisse von **5.** wie folgt. Die Erzeugende $q = (m^1, m^\nu)$ von $\mathfrak{L}_\nu$ ist „Basiseinheit des Einheitensystems $\mathfrak{L}_\nu$", während die übrigen Elemente von $\mathfrak{L}_\nu$ „abgeleitete Einheiten" sind. Danach ist die der „*Basiseinheit m* des Einheitensystems $\mathfrak{G}_0$" entsprechende Einheit q^ν eine „*abgeleitete* Einheit des Einheitensystems $\mathfrak{L}_\nu$".

Wird m als Längeneinheit „Meter" interpretiert, so gibt es zu der Basiseinheit m des Einheitensystems $\mathfrak{G}_0$ einen konkreten Repräsentanten, nämlich den in Sèvres bei Paris aufbewahrten Prototyp der Längeneinheit „Meter". Dagegen gibt es für die „Basiseinheit $q = (m^1, m^\nu)$ des Einheitensystems $\mathfrak{L}_\nu$" keinen konkreten Repräsentanten.

7. Für Fall b) der in **4.** gestellten Frage ist die Antwort *negativ*. Gäbe es nämlich einen unendlichen $\mathbb{Z}$-Modul L und in diesem einen zu $\mathbb{Z}$ isomorphen Untermodul H, so daß *jedes* Element von H in L durch *jede* natürliche Zahl teilbar wäre, dann gäbe es in L einen zu dem unendlichen $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ isomorphen Untermodul ($\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen). *Es gibt keinen $\mathbb{Q}$ enthaltenden freien $\mathbb{Z}$-Modul L von endlichem Typus.* Andernfalls wäre $\mathbb{Q}$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul von endlichem Typus und hätte dann eine endliche Basis, d.h. es gäbe endlich viele rationale Zahlen $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_\varrho$, so daß sich jedes $\vartheta \in \mathbb{Q}$ auf genau eine Weise durch

$$\vartheta = \alpha_1 \vartheta_1 + \cdots + \alpha_\varrho \vartheta_\varrho , \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho \in \mathbb{Z}$$

darstellen ließe, und zu $\vartheta_1/2 \in \mathbb{Q}$ gäbe es daher genau ein $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho) \in \mathbb{Z}^\varrho$, so daß $\vartheta_1/2 = \alpha_1 \vartheta_1 + \cdots + \alpha_\varrho \vartheta_\varrho$, also

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho) = (1/2, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^\varrho$$

wäre, womit der Widerspruch hergestellt ist.

Infolgedessen gibt es keine kommutative freie Gruppe $\mathfrak{L}$ von *endlichem* Typus, die von der in Fall b) gekennzeichneten Art ist.

In der Sprache der Physik heißt dies: *Es gibt kein Einheitensystem mit endlich vielen Basiseinheiten, das alle Einheiten m^ϑ mit $\vartheta \in \mathbb{Q}$ enthält.* Ein Einheitensystem, das alle Einheiten m^ϑ mit $\vartheta \in \mathbb{Q}$ enthält, hat *unendlich* viele Basiseinheiten. Solche Einheitensysteme sind unseres Wissens bislang in der Physik nicht gebräuchlich.

8. Aus dem Vorangehenden folgt unmittelbar: *Es gibt kein Einheitensystem mit endlich vielen Basiseinheiten, das alle Einheiten m^ϑ mit $\vartheta \in \mathbb{R}$ enthält.* Gäbe es nämlich ein solches System, dann gäbe es einen freien $\mathbb{R}$ enthaltenden $\mathbb{Z}$-Modul L von endlichem Typus, also auch einen $\mathbb{Q}$ enthaltenden, was in Widerspruch zu **7.** steht.

Anhang II

Zur Addition von Vektoren

Von der algebraischen Struktur des Größenkalküls wurde in der Arbeit [2], S. 32 gefordert:

Elemente verschiedener Vektorräume können nicht additiv verknüpft werden.

Dazu wurde gesagt, daß diese Forderung erhoben wird, um „physikalisch sinnvolle Gleichungen" zu erhalten. Im folgenden wird gezeigt, daß es nicht notwendig ist, diese Forderung zu stellen; sie ist nämlich schon erfüllt, da gemäß **1.3.** jede GV-Struktur eine Familie von paarweise *disjunkten* Vektorräumen über $\mathbb{R}$ ist, und solche Vektorräume die folgende Eigenschaft haben:

1. *Sind T und X disjunkte Vektorräume, dann gibt es keinen Vektorraum V, so daß T und X Vektorunterräume von V sind.*

Wären nämlich T und X Vektorunterräume eines Vektorraumes V, dann wäre das Nullelement von V gleichzeitig Nullelement von T und Nullelement von X. Es wäre also $T \cap X \neq \emptyset$ in Widerspruch zu der Voraussetzung $T \cap X = \emptyset$.

Aus **1.** ergibt sich, daß es für Elemente aus disjunkten Vektorräumen T und X keine additive Verknüpfung gibt, so daß die „Summe" Element eines Vektorraumes ist, von welchem T und X Vektorunterräume sind.

2. Eine instruktive Ergänzung zu **1.** liefert die Betrachtung des „Produktraumes" zweier Vektorräume. T und X seien zwei disjunkte, eindimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$, $E = T \times X$ sei die Menge der geordneten Paare (t,x) mit $t \in T$ und $x \in X$. Wird für die Paare aus E eine *Addition* (interne Komposition) gemäß

$$(t_1,x_1) + (t_2,x_2) = (t_1 + t_2, x_1 + x_2)$$

und eine *Multiplikation* mit einer reellen Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ (externe Komposition) gemäß

$$\lambda(t,x) = (\lambda t, \lambda x)$$

definiert, dann ist E ein *zweidimensionaler Vektorraum* über $\mathbb{R}$, der als Produktraum der Vektorräume T und X bezeichnet wird.

Die in E enthaltene Teilmenge $T' = \{(t,o) \mid t \in T\}$ ist ein eindimensionaler Vektorunterraum von E; ebenso $X' = \{(o,x) \mid x \in X\}$. Es ist

$$T' \cap X' = \{(o,o)\},$$

d.h., daß T' und X' als einziges gemeinsames Element das Nullelement von E haben.

Die Abbildung $t \to t' = (t,o)$ ist ein Isomorphismus von T auf T', desgl. die Abbildung $x \to x' = (o,x)$ von X auf X'. Jedes Element $(t,x) \in E$ kann als Summe von t' und x' dargestellt werden; es ist

$$(t,x) = (t,o) + (o,x) = t' + x';$$

E ist also *direkte Summe* von T' und X', $E = T' \dotplus X'$.

Bei der Addition von t' und x' ist zu beachten, daß es sich hier um Addition von Elementen des *zweidimensionalen Vektorraumes* E handelt, aber nicht um Addition von Elementen t und x der *eindimensionalen Vektorräume T und X*. Die Vektorräume T und T' sind zwar isomorph aber nach Definition disjunkt, desgl. X und X'.

In den Anwendungen werden oft isomorphe Vektorräume (bzw. die einander vermöge der Isomorphie zugeordneten Elemente) „identifiziert". Wie die vorangehenden Betrachtungen zeigen, sollten zumindest dann, wenn die Gefahr von Mißverständnissen besteht, nichtidentische Elemente durch unterschiedliche Symbole bezeichnet werden.

Zusammenfassung

Im Anschluß an die in [2] und [3] behandelte Theorie des Größenkalküls werden grundlegende Begriffe der Analysis wie Funktion, Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integral so verallgemeinert, daß mit ihnen Differential- und Integralrechnung inner-

halb eines physikalischen Einheitensystems betrieben werden kann. Dabei wird entsprechend den physikalischen Gegebenheiten stets angenommen, daß das zugrundegelegte Einheitensystem *endlich* viele Basiseinheiten hat, was bedeutet, daß die algebraische Struktur stets durch eine kommutative freie Gruppe von endlichem Typus bestimmt ist. Die Anwendung der einschlägigen Begriffe der Analysis wird an Beispielen erläutert, wobei die Abweichungen von der in der reellen Analysis üblichen Darstellungsweise erkennbar werden. Besonders interessante Einblicke in das Wesen der Dimensionsanalysis bieten sich bei der Untersuchung von Differentialgleichungen.

Literatur

[1] Sedov, L. I.: Similarity and dimensional methods in mechanics, Academic Press, New York-London, 1959.

[2] Quade, W.: Über die algebraische Struktur des Größenkalküls der Physik, Abh. d. Brschw. Wiss. Ges., XIII (1961), S. 24–65.

[3] Quade, W.: Zur Theorie und Anwendung des Größenkalküls der Physik, Abh. d. Brschw. Wiss. Gesellsch., XVIII (1966), S. 15–49.

[4] De Jong, F. J.: Dimensional Analysis for Economists, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1967 (enthält als Anhang eine Übersetzung von [2] ins Englische).

[5] Whitney, H.: The Mathematics of Physical Quantities, Math. Monthly 75 (1968), S. 115 bis 138, S. 227–256.

[6] Hainzl, J.: Verallgemeinerung des Π-Theorems mit Hilfe spezieller Koordinaten in Lieschen Transformationsgruppen, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 30, Nr. 4 (1968), S. 321–344.

[7] Griesel, H.: Algebra und Analysis der Größensysteme, Math.-Phys.-Semesterberichte, Bd. XVI (1969), S. 56–93, S. 189–224.

[8] Hochrainer, A.: Neues über Verhältnisgrößen, ETZ-A Bd. 90 (1969), Heft 6, S. 130–133.

[9] Fischer, J.: Zur algebraischen Grundlegung der Größenrechnung, ETZ-A Bd. 91 (1970), Heft 2, S. 121–122.

Benutzte Symbole

(Die Zahlen geben die Seite an, auf welcher das Symbol erstmalig auftritt)

$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen	2
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	2
$\mathfrak{G}_0$	kommutative freie Gruppe von endlichem Typus	2
$a_1, \ldots, a_\varrho$	Basiselemente von $\mathfrak{G}_0$	2
$\boldsymbol{\mathfrak{G}}_0$	zu $\mathfrak{G}_0$ isomorphe kommutative freie Gruppe eindimensionaler Vektorräume	2
e_0	Einselement von $\mathfrak{G}_0$	3
K	Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der Basis e_0 (kommutativer Körper der „dimensionslosen Größen")	3
T, X	eindimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$ (Elemente von $\boldsymbol{\mathfrak{G}}_0$)	3
t, x	Elemente von T bzw. X	3
f, φ	Abbildungen (Funktionen)	3
E	Vereinigung einer Folge von paarweise disjunkten Mengen	3
GV	GV-Struktur (Gruppe von Vektorräumen)	3
$X \times Y$	kartesisches Produkt zweier eindimensionaler Vektorräume	3
h	Isomorphismus von $\mathbb{R}$ auf X	4
λ, τ, ξ	reelle Zahlen	4
$\\|x\\|$	Norm von $x \in X$	4
o	Nullelement eines Vektorraumes aus $\boldsymbol{\mathfrak{G}}_0$	4
$U(x_1, \varrho)$	Kugelumgebung von $x_1 \in X$ mit dem Radius ϱ	5
$\mathbb{R}^*$	Menge der von Null verschiedenen reellen Zahlen	5
$\mathbb{R}_+$	Menge der nicht negativen reellen Zahlen	5
$\mathbb{R}_+^*$	Menge der positiven reellen Zahlen	5
I	Intervall der reellen Zahlengeraden	5
J	Intervall eines eindimensionalen Vektorraumes	5
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	6
$(t \mid t_1)$	skalares (inneres) Produkt der Vektoren t und t_1 des Vektorraumes T	8
$\mathrm{f} \circ \mathrm{g}$	Verkettung der Abbildungen f und g, so daß $(\mathrm{f} \circ \mathrm{g})(\tau) = \mathrm{f}(\mathrm{g}(\tau))$	10
f^{-1}	inverse Abbildung von f	12
$\mathscr{F}(W, X)$	Raum der Abbildungen von $W \subset T$ in X	13
$\mathscr{B}(W, X)$	Raum der beschränkten Abbildungen von W in X	13
$\mathscr{C}(J, X)$	Raum der stetigen Abbildungen von $J \subset T$ in X	15
f'	Ableitung einer Abbildung (Funktion)	16
$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$	bestimmtes Integral über das in T gelegene Intervall mit den Endpunkten t_1 und t_2	19
Γ	unendlicher freier $\mathbb{Z}$-Modul von endlichem Typus	25
$\mathfrak{L}$	kommutative freie Gruppe von endlichem Typus	27
$\mathfrak{H}$	Untergruppe von $\mathfrak{L}$	27
$\mathfrak{L}_\nu$	unendliche zyklische Gruppe	27
$\mathfrak{H}_\nu$	Untergruppe von $\mathfrak{L}_\nu$	27